MAT402 **Année 2018-2019**

Feuille d'exercices 3

Exercice 1. Etudier la convergence simple, normale, et uniforme des séries de fonctions $\left(\sum_{n\geq 0} u_n\right)$ de terme général défini par :

1. $u_n(x) = e^{-nx}$, $x \in \mathbb{R}_+$.
2. $u_n(x) = x^n$, $x \in [0, 1]$.
3. $u_n(x) = \dfrac{1}{2^n}\sin(3^n x)$, $x \in \mathbb{R}$.
4. $u_n(x) = \dfrac{1}{1+(n-x)^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 2. Mêmes questions pour les séries de terme général défini par :

1. $u_n(x) = n^x$, $x \in \mathbb{R}$.
2. $u_n(x) = (-1)^n n^x$, $x \in \mathbb{R}$.
3. $u_n(x) = e^{-n(x^2+1)}$, $x \in \mathbb{R}$.
4. $u_n(x) = \frac{1}{n}\arctan(\frac{x}{n})$, $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 3. Mêmes questions pour les séries de terme général défini par :

1. $u_n(x) = ne^{-nx}$, $x \in \mathbb{R}_+^*$.
2. $u_n(x) = \begin{cases} n^2x(1-nx) & \text{si } x \in [0, \frac{1}{n}], \\ 0 & \text{si } x \in [\frac{1}{n}, 1]. \end{cases}$
3. $u_n(x) = e^{-nx}\sin x$, $x \in \mathbb{R}_+$.
4. $u_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{1+n^2x^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 4. On considère la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ de fonctions $u_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définies par

$$u_n(x) = \frac{1}{n+xn^2} \quad (n \geq 1, x \in \mathbb{R}).$$

1. Déterminer le domaine de convergence simple $D \subset \mathbb{R}$ de la série de fonctions $\left(\sum_{n\geq 1} u_n\right)$.
2. Étudier la convergence normale de la série de fonctions $\left(\sum_{n\geq 1} u_n\right)$ sur D, puis sur $[a, +\infty[$ pour tout réel $a > 0$.
3. La série de fonctions $\left(\sum_{n\geq 1} u_n\right)$ converge-t-elle uniformément sur D ?
4. La fonction $f = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ est-elle dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$?
5. Montrer que f est intégrable sur $[1, 2]$ et exprimer $\int_1^2 f(t)\,\mathrm{d}t$ comme la somme d'une série numérique.

Exercice 5. Etudier la série de fonctions de terme général u_n défini pour $n \geq 1$ par :

$$u_n(x) = \frac{1}{n^3+n^4x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

La somme est-elle continue sur $\mathbb{R}$? dérivable sur $\mathbb{R}$?

Exercice 6. Mêmes questions pour la série de terme général v_n défini pour $n \geq 1$ par :

$$v_n(x) = \frac{1}{n^2+n^4x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Exercice 7. Montrer que la série de fonctions de terme général u_n défini pour $n \geq 1$ par

$$u_n(x) = \frac{(-1)^n}{2\sqrt{n} + \cos x}\,, \qquad x \in \mathbb{R},$$

converge uniformément sur $\mathbb{R}$. Étudier la convergence normale.

Exercice 8. On se propose de montrer que la série de terme général v_n défini pour $n \geq 1$ par :

$$v_n(x) = \frac{\cos(nx)}{\sqrt{n+x}}\,, \qquad x \in \mathbb{R},$$

converge uniformément sur l'intervalle $I = [\alpha, 2\pi - \alpha]$, où $0 < \alpha < \pi$.

On se donne $x \in \mathbb{R}$ et $n, p, q \in \mathbb{N}^*$, avec $n \geq p$. On note $S_{p,n}(x) = \displaystyle\sum_{k=p}^{n} \cos(kx)$.

1. Montrer en utilisant $\cos a = \frac{1}{2}(e^{ia} + e^{-ia})$ que si $x \neq 2k\pi$, alors $|S_{p,n}(x)| \leq \dfrac{1}{|\sin(x/2)|}$.
2. Vérifier que $\displaystyle\sum_{n=p}^{p+q} v_n(x) = \sum_{n=p}^{p+q-1} S_{p,n}(x)\Big[\frac{1}{\sqrt{n+x}} - \frac{1}{\sqrt{n+1+x}}\Big] + \frac{S_{p,p+q}(x)}{\sqrt{p+q+x}}$.
3. En déduire que pour tout $x \in I$, $\displaystyle\left|\sum_{n=p}^{p+q} v_n(x)\right| \leq \frac{1}{\sqrt{p+x}}\frac{1}{|\sin(\frac{x}{2})|}$. En déduire le résultat.

Exercice 9. Pour $x > 0$, on pose

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{x(x+1)\dots(x+n)}\,.$$

1. Montrer que la somme ci-dessus définit une application continue $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$.
2. Exprimer $f(x+1)$ en fonction de $f(x)$ pour tout $x > 0$.
3. Étudier la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}_+^*$.
4. Montrer que la fonction f est monotone, et donner un équivalent de $f(x)$ lorsque $x \to 0$, ainsi que lorsque $x \to +\infty$.
5. Tracer le graphe de f.

Exercice 10. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions $u_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ définies par $u_0(x) = 1$ et, si $n \geq 1$,

$$u_n(x) = \begin{cases} \dfrac{(-1)^n}{n!}(x\,\ln(x))^n & \text{si } x \in \,]0,1]\,, \\ 0 & \text{si } x = 0\,. \end{cases}$$

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, vérifier que u_n est continue sur $[0,1]$.
2. En intégrant par parties, calculer $\int_0^1 u_n(x)\,\mathrm{d}x$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Montrer que la série de fonctions $\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n\right)$ converge normalement sur $[0,1]$, et calculer sa somme.
4. En déduire que
$$\int_0^1 \frac{1}{x^x}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}\,.$$

Exercice 11. On souhaite étudier la somme S de la série de fonctions de terme général v_n défini pour $n \geq 1$ par :

$$v_n(: x \mapsto) x) = \frac{1}{n^2 + n^4x^2}\,, \quad x \in \mathbb{R}.$$

1. Montrer que $\left(\sum_{n\geq 1} v_n\right)$ converge simplement sur $\mathbb{R}$. Sa somme S est donc une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
2. Montrer que S est paire, et (strictement) décroissante sur $\mathbb{R}_+$.
3. Montrer que S est continue sur $\mathbb{R}$, et qu'elle tend vers 0 en $+\infty$.
4. Étudier la convergence normale de $\left(\sum_{n\geq 1} v_n'\right)$: montrer qu'elle n'a pas lieu sur $\mathbb{R}$, mais par contre sur $\mathbb{R} \setminus [-a, a]$, pour tout $a > 0$. En déduire que S est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
5. Pour étudier la dérivabilité de S en 0, on forme le taux d'accroissement $\tau_h S(0) = \dfrac{1}{h}(S(h) - S(0))$, tout d'abord pour $h > 0$. Écrire ce taux d'accroissement sous la forme $h \sum_{n=1}^{+\infty} w_h(n)$, puis comparer les sommes partielles de la série $\left(\sum_{n\geq 1} w_h(n)\right)$ avec des intégrales (de la fonction $w_h : t \mapsto (1 + h^2t^2)^{-1}$). En déduire que $\tau_h S(0)$ tend vers $-\pi/2$ lorsque h tend vers 0^+.
6. Donner l'allure du graphe de S.
7. La fonction S est-elle dérivable en 0 ?

Exercice 12. Escalier du diable ou de Cantor
On définit la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ par récurrence : $f_0(x) = x$ pour tout $x \in [0, 1]$ et, pour $n \geq 0$, $f_{n+1}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} f_n(3x) & \text{si } x \in [0, \frac{1}{3}], \\ \frac{1}{2} & \text{si } x \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}], \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} f_n(3x - 2) & \text{si } x \in [\frac{2}{3}, 1]. \end{cases}$

1. Tracer sur un même graphique les graphes de f_0, f_1, f_2.
2. Montrer que chaque f_n est continue et croissante.
3. On considère la série de fonctions de terme général $u_n = f_n - f_{n-1}$ $(n > 0)$. Montrer que $(\sum u_n)$ converge normalement.
4. En déduire que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction f continue et croissante.

Exercice 13. Soient $a \in]0, 1[$ et $b > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction u_n de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par

$$u_n(x) = a^n \sin(b^n x) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

1. Montrer que la série $\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n\right)$ converge normalement. On note f sa somme.
2. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que si $ab < 1$, f est de classe C^1.
4. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = af(bx) + \sin(x)$.
5. On suppose que $ab = 1$ et que b est un entier ≥ 2. Montrer que f n'est dérivable en aucun point de la forme
$$x = 2kb^n\pi,\ (k, n) \in \mathbb{Z}^2.$$
On commencera par le cas $x = 0$ et on montrera que f est 2π-périodique. Que dire de cette famille de points (considérer par exemple le cas $b = 10$) ?