Contrôle final de connaissances

Exercice 1. (2+3 points) Questions de cours.

1. Déterminer la factorisation LU de la matrice où L est à diagonale unitaire.
$$A = \begin{pmatrix} 16 & -8 & 4 \\ -8 & 5 & -3 \\ 4 & -3 & 11 \end{pmatrix}$$
2. Déterminer sa factorisation de Choleski.

1. $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & -1 & 1 \end{pmatrix}$ $U = \begin{pmatrix} 16 & -8 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$
2. $R = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Exercice 2. (1+2+1+2+2 points) Pour $n \geqslant 2$, soit $B_n \in M_n(\mathbb{R})$ définie par
$$B_n = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que les valeurs propres de B_n sont positives ou nulles (on pourra faire appel à un résultat sur la localisation des valeurs propres vu en cours dont on rappellera l'énoncé exact).
2. Montrer par récurrence sur n que $\det(B_n) = 1$.
3. En déduire que B_n est symétrique définie positive.

4. Déterminer la factorisation Choleski de B_n.
5. En déduire B_n^{-1}.

1. Par symétrie réelle, toutes les valeurs propres sont réelles. Puis on utilise une application directe de la localisation des valeurs propres de Gerschgorin (voir la fin du chapitre V du cours)
2. Il faut une initialisation de la récurrence pour $n = 1$ et $n = 2$ et définir comme hypothèse de récurrence, $\det(B_k) = 1, \forall 1 \leq k \leq n$ et non pas juste $\det(B_n) = 1$. En développant par rapport à la dernière colonne, on trouve

$$\det(B_{n+1}) = 2\det(B_n) - (-1)\det(C_n)$$

où $C_n = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $\det(C_n) = -\det(B_{n-2})$

en développant par rapport à la dernière ligne.
3. on a vu que les valeurs propres sont positives ou nulles. D'après $\det(B_n) = 1$, une valeur propre ne peut pas être nulle. La matrice a donc toutes ses valeurs propres strictement positives, elle est donc définie positive.
4.
$$R_n = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5.
$$B_n^{-1}=\begin{pmatrix} n & n-1 & n-2 & n-3 & \dots & 2 & 1\\ n-1 & n-1 & n-2 & n-3 & \dots & 2 & 1\\ n-2 & n-2 & n-2 & n-3 & \dots & 2 & 1\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 3 & 3 & \dots & \dots & 3 & 2 & 1\\ 2 & 2 & \dots & \dots & \dots & 2 & 1\\ 1 & 1 & \dots & \dots & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 3. (2+2+1+1+1+1+1+2 points)

1. Étant donnés $n+1$ points distincts $x_0,\ x_1,\dots,x_n$ de $[-1,1]$ fixés. Montrez qu'il existe une unique famille de poids $w_0,\dots,w_n\in\mathbb{R}$ telle que pour tout polynôme $P\in\mathbb{R}_n[X]$, on ait l'identité
$$\int_{-1}^{1}P(x)\,dx=\sum_{i=0}^{n}w_iP(x_i). \tag{1}$$
2. La méthode de Gauss consiste à choisir $x_0,\dots,x_n$ tels qu'avec les poids $w_0,\dots,w_n$ associés on ait la relation (1) pour tout polynôme de $\mathbb{R}_{2n+1}[X]$! On admettra l'existence de tels points $x_0,\dots,x_n$. On appelle polynôme de Legendre la suite de polynômes définie par la relation de récurence
$$(n+1)L_{n+1}(x)=(2n+1)xL_n(x)-nL_{n-1}(x),\ \ L_{-1}=0, L_0=1.$$
On rappelle que la famille $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à racines simples et est orthogonale : elle vérifie la relation que l'on ne cherchera pas à redémontrer
$$\forall(n,\,m)\in\mathbb{N}^2,\ \int_{-1}^{1}L_n(x)L_m(x)\,dx=\frac{2}{2n+1}\delta_{nm}$$
où $\delta_{nm}=1$ si $n=m$ et 0 sinon. On définit $M_n=L_n/\sqrt{\int_{-1}^{1}L_n^2(x)\,dx}$ pour n entier positif ou nul et on pose $M_{-1}=0$. Montrez que la suite de polynômes $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfait
$$c_{n+1}M_{n+1}(x)=xM_n(x)-c_nM_{n-1}(x),\text{ où } c_n=(n^2/(4n^2-1))^{1/2}.$$

3. Montrez l'égalité vectorielle
$$xM(x) = TM(x) + c_{n+1}M_{n+1}(x)e_n$$
où e_n est le n-ième vecteur de la base canonique,
$$M(x) = \begin{pmatrix} M_0(x) \\ M_1(x) \\ \vdots \\ M_n(x) \end{pmatrix} \text{ et } T = \begin{pmatrix} 0 & c_1 & & & \\ c_1 & 0 & c_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & c_{n-1} & 0 & c_n \\ & & & c_n & 0 \end{pmatrix}.$$
4. En déduire que $M_{n+1}(x) = 0$ si et seulement si x est une valeur propre de T.
5. Soient $x_0 \leq \cdots \leq x_n$ les valeurs propres de T et $v_0, \ldots, v_n$ des vecteurs propres associés. Montrez que
$$v_i = \alpha_i(M_0(x_i), \ldots, M_n(x_i)) \text{ avec } \alpha_i \neq 0.$$
6. Montrez que pour des points $x_0, \ldots, x_n$ associés à la méthode de Gauss, on a pour tout $P = M_iM_j$ avec $0 \leq i, j \leq n$,
$$\delta_{ij} = \int_{-1}^{1} P(x)\,dx = \int_{-1}^{1} M_i(x)M_j(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n} w_k M_i(x_k)M_j(x_k).$$
7. Montrez que $Id = P^tWP$ où
$$W = \begin{pmatrix} w_0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & w_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & w_n \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} M_0(x_0) & \ldots & M_n(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ M_0(x_n) & \ldots & M_n(x_n) \end{pmatrix}.$$
8. En déduire que $W^{-1} = PP^t$ et que $\frac{1}{w_i} = \sum_{k=0}^{n} M_k(x_i)^2$ pour tout $0 \leq i \leq n$. Conclure que les poids de la méthode de Gauss sont donnés par
$$w_i = 2\frac{(v_i)_1^2}{\sum_{k=1}^{n+1}(v_i)_k^2}$$

où $(v_i)_k$ désigne la k-ième coordonnée du vecteur propre v_i. Il s'agit de la méthode de la méthode de Golub-Welsch.

1) Unicité : Si de tels coefficients existent, les polynômes de Lagrange P_k associés aux points $(x_i)_{0\leq i\leq n}$ de degrés au plus n vérifient $P_k(x_i) = 0$ si $i \neq k$ et $P_k(x_k) = 0$. On aurait donc nécessairement

$$\int_{-1}^{1} P_k(x)\, dx = w_k$$

pour $k = 0, \ldots, n$ ce qui assure l'unicité des poids $(w_k)_{0\leq k\leq n}$.
Existence : en choisissant les poids $w_k = \int_{-1}^{1} P_k(x)\, dx$ pour $0 \leq k \leq n$, on voit que la formule de quadrature est exacte pour les polynômes de Lagranges d'ordre n . Comme ceux-ci forment une base de $\mathbb{R}^n[X]$ et que l'intégrale est linéaire, on voit que la formule de quadrature est exacte pour tout polynôme de $\mathbb{R}^n[X]$. En effet si $P = \sum_{k=0}^{n} a_k P_k$, on a $\sum_{i=0}^{n} w_i P(x_i) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{k=0}^{n} w_i a_k P_k(x_i) = \sum_{k=0}^{n} a_k w_k = \sum_{k=0}^{n} a_k \int_{-1}^{1} P_k(x)\, dx == \int_{-1}^{1} P(x)\, dx.$
2) On sait que pour tout entier $n \geq 0$,

$$\sqrt{\int_{-1}^{1} L_n(x)^2\, dx} = \sqrt{\frac{2}{2n+1}}.$$

Ainsi d'après la relation de récurence définissant les polynômes L_n, on peut écrire

$$(n+1)\sqrt{\frac{2}{2n+3}}M_{n+1}(x) = (2n+1)\sqrt{\frac{2}{2n+1}}xM_n(x) - n\sqrt{\frac{2}{2n-1}}M_{n-1}(x).$$

En divisant cette égalité par $\sqrt{2}\sqrt{2n+1}$ et en simplifiant, on trouve bien la relation de récurence demandée.
3) Il s'agit d'une éécriture matricielle directe de la relation de récurence, tenant compte du fait que $M_{-1} = 0$ pour la première ligne.
4) L'équivalence est immédiate d'après l'égalité précédente si l'on sait que $M(x)$ est bien un vecteur non nul. Ceci est vrai puisque $M_0(x) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}$.

5) T étant symétrique réelle, elle est bien diagonalisable dans $\mathbb{R}$. De plus d'après 4) les $(x_i)_{0\leq i\leq n}$ sont des racines de M_{n+1} qui est à racines simples. Ainsi $x_0 < \cdots < x_n$ et chaque espace propre est donc de dimension 1 ce qui assure la propriété demandée.
6) L'égalité vient du fait que l'on a supposé que la méthode d'intégration de Gauss est exacte pour des polynômes de degré plus petit que $2n+1$. C'est le cas ici puisque les polynômes M_i sont de degré plus petit que n. L'orthogonalité des polynômes de Legendre assure alors l'égalité.
7) $P = (M_j(x_i))_{0\leq i,j\leq n)}$ donc $WP = (w_i M_j(x_i))_{0\leq i,j\leq n)}$ et

$$P^t W P = (\sum_{k=0}^{n} M_i(x_k) w_k M_j(x_k))_{0\leq i,j\leq n)}$$

ce qui donne bien la matrice identité en utilisant le résultat de la question 6).
8) D'après 7), on a $P^t W = P^{-1}$. Si l'on multiplie cette égalité à gauche par P on obtient bien $PP^t W = Id$ d'où $W^{-1} = PP^t$. De plus comme

$$W^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{w_0} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{w_2} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \frac{1}{w_n} \end{pmatrix},$$

le calcul des coefficients diagonaux dans la relation $W^{-1} = PP^t$ donne bien l'identité $\frac{1}{w_i} = \sum_{k=0}^{n} M_k(x_i)^2$.
Par ailleurs, d'après l'expression obtenue à la question 5), on a

$$||v_i||^2 = \alpha_i^2 \sum_{k=0}^{n} M_k(x_i)^2$$

ce qui avec l'égalité ci-dessus donne

$$w_i = \frac{\alpha_i^2}{||v_i||^2}.$$

Comme $M_0(x_i) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, on a aussi $(v_i)_1 = \frac{\alpha_i}{\sqrt{2}}$ pour tout $0 \leq i \leq n$ d'où l'identité souhaitée.