Exercice 1. On veut illustrer le fait que pour une méthode d'ordre n et une fonction f de classe $\mathcal{C}^{n+1}$, il existe une constante C telle que l'erreur E_N de la méthode pour N subdivisions est $\leq \frac{C}{N^{n+1}}$. On prend $f = \cos$ et on approche $\int_0^2 \cos(x)dx = \sin(2)$ par la méthode des trapèzes et de Simpson.
Calculer l'erreur E_N pour $N \in \{2, 2^2, \ldots, 2^{10}\}$ pour les méthodes des trapèzes et de Simpson et représenter graphiquement $(\log(N), -\log(E_N))_{N\in\{2,2^2,\ldots,2^{10}\}}$
Même question pour $\int_0^3 \cos(x)e^{\sin(x)}$.

Exercice 2. On souhaite approcher par la méthode de Simpson :

$$K = \int_0^{\pi/2} f(x)\ dx, \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{4}\sin(x)^2}}$$

1. Calculer et simplifier la dérivée d'ordre 4 f_4 de f (faire les calculs à la machine).

   Il est temps de faire du calcul symbolique !
   Sous Python, on utilise le package sympy. On peut créer le symbole x par x=Symbol("x") puis créer des expressions : f=1/sqrt(1−Rational(1,4)*sin(x)**2) .
   Noter l'usage de Rational(1,4) qui permet de ne pas avoir de flottants dans l'expression. On peut ensuite la dériver 4 fois avec Diff(f, x, 4), simplifier l'expression avec simplify, l'évaluer formellement par exemple en $\pi/2$ en faisant f.subs(x, pi/2.

2. Conjecturer un majorant de $|f_4|$ sur $[0, \pi/2]$ à l'aide d'une représentation graphique de f_4 sur cet intervalle. On notera M_4 ce majorant.
   Bonus : preuve que M_4 est bien le majorant :
   (a) Calculer et simplifier la dérivée 5-ième de f, montrer que f_5 s'annule si et seulement si $x = 0, \pi/2$ ou si $\sin(x)$ est racine du polynôme P de degré 8 que l'on déterminera
   (b) Déterminer une valeur approchée des racines de P sur $[0, 1]$ (par exemple à l'aide de `solve`) puis donner une valeur approchée du(des) x correspondant(s). Faire un tableau de signes de $f^{(5)}$.
   (c) Calculer $f_4(0)$, $f_4(\pi/2)$ et $f_4(x)$ pour ces racines, en déduire une preuve de la majoration de $|f_4|$ par M_4.
3. Combien de subdivisions faut-il pour être sur que la méthode de Simpson renvoie $\tilde{K}$ une valeur approchée de K avec une précision inférieure à `1e-8` ? Calculer $\tilde{K}$.

Exercice 3. On s'intéresse à une formule de quadrature obtenue en interpolant sur une subdivision élémentaire $[\alpha, \alpha + h]$ en 5 points régulièrement répartis :

$$x_0 = \alpha, x_1 = \alpha + \frac{h}{4}, x_2 = \alpha + \frac{h}{2}, x_3 = \alpha + \frac{3h}{4}, x_4 = \alpha + h$$

1. Calcul des coefficients :
   On considère le polynôme P d'interpolation de Lagrange en les points (x_i, y_i), pour des valeurs indéterminées y_i. Calculer l'intégrale

$$\int_a^{a+h} P(x)dx$$

   en utilisant le calcul formel (ou à la mains avec la formule d'interpolation de Newton), et en déduire la formule de quadrature $I(f)$ sur $[a, b]$ de pas $h = (b - a)/N$.

2. Ordre et erreur :
   Déterminer le plus petit n tel que la formule d'intégration ne soit plus exacte pour x^n et en déduire l'ordre de cette formule. Donner une majoration de l'erreur pour f suffisamment régulière.
3. Soit $f(x) = \exp(-x^2)$. Calculer à la machine $f^{[6]}, f^{[7]}$, en déduire une majoration de $f^{[6]}||$ sur $[0, 2]$ Déterminer un nombre de subdivisions N telle que $|\int_0^2 f(x)dx - I(f)| \leq \varepsilon$. En déduire une valeur approchée à `1e-10` près de l'intégrale.

Exercice 4. Quadrature de type gaussien
On considère le produit scalaire

$$< f|g >= \int_1^{+\infty} f(x)g(x)e^{-x}\ dx$$

Construire les 4 premiers polynômes orthogonaux pour ce produit scalaire, puis une formule d'intégration pour $\int f(t)e^{-t}\ dt$ qui soit exacte pour les polynômes de degré plus petit que 7. Tester avec $t^5, t^6, e^{t/2}$.

Exercice 5. Proposer une méthode permettant de calculer avec une erreur d'au plus `1e-4` la valeur de $\int_{0.5}^{+\infty} e^{-t^3}\ dt$.