Exercice 1. Déterminer le polynôme d'interpolation passant par les points
$(1,3),(2,2),(4,1),(5,4)$
en exécutant à la main l'algorithme des différences divisées. Calculer sa valeur en 3. Programmer l'algorithme des différences divisées et d'évaluation rapide en un point.

Exercice 2. Déterminer la droite de régression linéaire approchant les points
$(1,3),(2,5),(3,6),(4,7),(5,7),(6,10),(10,15)$ (utiliser la commande `numpy.polyfit` en Python). Tracer ces points et la droite de régression linéaire.
Faites de même en enlevant le point d'abscisse 10, et comparer l'extrapolation de la droite au point avec la valeur de l'ordonnée 15. Faites de même en utilisant un polynôme de degré 3.

Exercice 3. On cherche à approcher la fonction $f(x) = \sin(\pi x)$ sur $[-1,1]$ par un polynôme.

1. Déterminer la valeur exacte de $f(k/6)$ pour $k \in [-6,6]$, puis déterminer numériquement le polynôme de Lagrange correspondant à ces 13 points, et représenter graphiquement l'erreur (comme fonction de x). Quelle est l'erreur maximale ?
2. Faire le même calcul avec 7 points de Tchebyshev.

Exercice 4. On cherche à approcher la fonction

$$\texttt{erf}(x) = \int_0^x \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx$$

par un polynôme sur des intervalles de $\mathbb{R}^+$. Près de 0, on peut utiliser le développement de Taylor, près de l'infini son développement asymptotique. Mais pour x entre disons 1 et 10, aucun des deux développements ne converge assez vite. Proposez une méthode d'approximation basée sur une interpolation qui donne une précision raisonnable (disons `1e-8`).

Exercice 5. Illustrer le phénomène de Runge avec la fonction $1/(1+25x^2)$ interpolée sur $[-1,1]$ par de plus en plus de points équidistants. Véifiez qu'il ne se produit pas en prenant des points de Tchebyshev.

Exercice 6. Déterminer le polynôme d'interpolation aux points $(a, f(a)), (\frac{a+b}{2}, f(\frac{a+b}{2})), (b, f(b))$. Calculer et factoriser son intégrale entre a et b (formule de Simpson).

Exercice 7.

1. Calculer le polynôme caractéristique d'une matrice de taille n en utilisant l'interpolation du déterminant en $0, ..., n$ (écrire un programme et l'exécuter pour une matrice aléatoire de taille 100 par exemple).
2. Combien d'opérations (en fonction de n) faut-il effectuer pour déterminer ce polynôme (on suppose le calcul du déterminant en une valeur de λ fait numériquement) ?
3. Tester ensuite la factorisation du polynôme caractéristique pour une matrice de taille pas trop petite (aléatoire ou matrice companion d'un polynôme) et comparer avec `egvl`. Est-ce une bonne idée de calculer les racines du polynôme caractéristique pour diagonaliser une matrice ?

Exercice 8. On considère le produit scalaire $f.g = \int_{-1}^1 f(t)g(t)dt$ sur les fonctions continues de $[-1,1] \to \mathbb{R}$. Construire une base orthonormale de 5 polynômes de degré 0, 1, 2, 3 et 4. Soit P le projeté de la fonction $f(x) = \ln(2+x)$ sur cette base, représenter P et f sur le même graphe. Quelle est la distance de f à l'espace des polynômes de degré ≤ 4 ?

Exercice 9. Déterminer la meilleure approximation linéaire sur $[0,1]$ de $f(x) = x^5 + x^3$ au sens de la norme L^∞ puis au sens de la norme L^2.

Exercice 10. On donne les points $(0,2), (1,1), (2,2/3), (3,1/2), (4,1/3), (10,1/10)$. Chercher des fonctions approchant au mieux ces points au sens des moindres carrés. Comparer les erreurs.

Exercice 11. On veut éditer une table de cosinus en degrés qui permette de déterminer la valeur de cos par interpolation linéaire entre deux valeurs successives du tableau avec une erreur d'au plus `1e-6`. Combien d'entrées sont-elles nécessaires dans la table ?