

Exercices de théorie de la mesure **sûr ?** MAT366

Table des matières

1 Révisions	2
1.1 Fonctions élémentaires	2
1.2 Primitives basiques	3
1.3 Calcul de primitives	6
1.4 (Fractions rationnelles)	8
1.4.1 Polynômes en sinus et cosinus	10
1.4.2 Changement de variables	11
2 Algèbres de Boole de parties d'un ensemble et mesures	15
2.1 Intégration basique	18
2.2 Quelques applications	23
3 Intégration élémentaire (2ème partie)	26
4 Intégrales impropres	38
5 Séries de Fourier	71
6 Intégrales curvilignes	79
7 Intégrales doubles	82
8 Espaces probabilisés, variables aléatoires discrètes	98
8.1 Espaces de probabilité	98
8.2 Probabilités conditionnelles et indépendance	106
8.3 Variables discrètes	111
9 Espaces probabilisés, variables aléatoires à densité	132

1 Révisions

1.1 Fonctions élémentaires

Exercice 1 *La fonction exponentielle*) La fonction exponentielle est définie comme la (seule) fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ différentiable qui satisfait que $f' = f$ et $f(0) = 1$.

1. Soit f comme ci-dessus. Montrer que $f(x)f(-x) = 1$, pour tout $x \in \mathbb{R}$. En particulier, $f(x) \neq 0$ et $f(-x) = f(x)^{-1}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Indication : calculer la dérivée de l'application $x \mapsto f(x)f(-x)$.

2. Soit $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable qui satisfait que $g' = g$. Montrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $g(x) = Cf(x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$. En déduire l'unicité de f .

Indication : considérer la fonction $x \mapsto g(x)/f(x)$.

3. En déduire que $f''(x) = f'(x) = f(x) > 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$. En particulier, f est strictement croissante et concave.
4. Montrer que $f(x+y) = f(x)f(y)$, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$. En déduire que

$$f(nx) = f(x)^n,$$

pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Indication : considérer la fonction $g(x) = f(x+y)$, avec y fixe.

5. On définit $e = f(1)$. Noter que $e = f(1) > f(0) = 1$. On écrira en plus $f(x) = e^x$. Montrer que la série dans

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (\text{EXP})$$

converge uniformément sur tout intervalle borné de \mathbb{R} et définit par conséquent une fonction différentiable \exp . Comme $\exp' = \exp$ et $\exp(0) = 1$, elle coïncide avec la fonction exponentielle. Cela démontre l'existence. En particulier,

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}. \quad (\text{E})$$

Proof. La solution suit directement des indications détaillées dans l'exercice. \square

Exercice 2 *Les fonctions trigonométriques*) Les fonctions *sinus* et *cosinus* sont définies comme les (seules) fonctions $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ différentiables qui satisfont que $f' = g$, $g' = -f$, $f(0) = 0$ et $g(0) = 1$, respectivement.

1. Soient f et g comme ci-dessus. Montrer que $f(x)^2 + g(x)^2 = 1$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Indication : calculer la dérivée de l'application $x \mapsto f(x)^2 + g(x)^2$.

2. Soient $f_1, g_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ des fonction différentiables qui satisfont que $f_1' = g_1$, $g_1' = -f_1$. Montrer qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que

$$f_1 = bf - ag \text{ et } g_1 = af + bg. \quad (1)$$

En déduire l'unicité de f et de g , que l'on appelle *sinus* et *cosinus*, et que l'on note \sin et \cos , respectivement.

Indication : montrer que les dérivées des fonctions $fg_1 - f_1g$ et $ff_1 + gg_1$ valent zéro. Après, calculer la différence entre le produit de la première expression par f et le produit de la deuxième par g .

3. Montrer que $\sin(-x) = -\sin(x)$ et $\cos(-x) = \cos(x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Indication : utiliser (1) avec $f_1(x) = \cos(-x)$ et $g_1(x) = \sin(-x)$.

4. Montrer que

$$\begin{aligned}\sin(x+y) &= \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y), \\ \cos(x+y) &= \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y),\end{aligned}$$

pour tous $x, y \in \mathbb{R}$.

Indication : utiliser (1) avec $f_1(x) = \sin(x+y)$ et $g_1(x) = \cos(x+y)$, où y est fixe.

5. Montrer que les séries dans

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \text{ et } x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad (\text{SC})$$

convergent uniformément sur tout intervalle borné de \mathbb{R} et définissent par conséquent des fonctions différentiables SIN et COS. Elles vérifient les conditions $\text{SIN}' = \text{COS}$, $\text{COS}' = -\text{SIN}$, $\text{SIN}(0) = 0$ et $\text{COS}(0) = 1$, donc elles coïncident avec les fonctions sinus et cosinus, respectivement. Cela démontre l'existence.

Proof. La solution suit directement des indications détaillées dans l'exercice. \square

Exercice 3 *La définition de π*) On définit $\pi \in \mathbb{R}$ comme le plus petit nombre positif qui satisfait que $\cos(\pi/2) = 0$. Le but de cet exercice est de démontrer que ce nombre existe.

1. Supposons qu'il n'existe aucun $x > 0$ tel que $\cos(x/2) = 0$. Comme $\cos(0) = 1$, $\cos(x) > 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}_{>0}$. En déduire que \sin (resp., \cos) est une fonction strictement croissante (resp., décroissante) sur $\mathbb{R}_{>0}$.
2. On fixe $a > 0$. D'après l'item précédent, $0 < \cos(a) < 1$. Noter que

$$0 < \cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) < \cos^2(a)$$

et en particulier $\cos(2^n a) < (\cos(a))^{2^n}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire que la suite $(\cos(2^n a))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0 et, en conséquence, $(\sin(2^n a))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 1.

3. Montrer que $\cos(x)$ (resp., $\sin(x)$) converge vers 0 (resp., 1) quand x tend vers $+\infty$. En particulier, il existe $b > 0$ tel que $\cos(b) < 1/4$ et $\sin(b) > 1/2$. En déduire que $\cos(2b) = \cos^2(b) - \sin^2(b) < 0$, pour trouver un absurde. Conclure qu'il existe $x > 0$ tel que $\cos(x/2) = 0$.
4. Noter que l'ensemble $\mathcal{P} = \{x > 0 : \cos(x/2) = 0\}$ est non vide et minoré. On définit $\pi = \inf \mathcal{P}$. Montrer que $\pi \in \mathcal{P}$.

Proof. La solution suit directement des indications détaillées dans l'exercice. \square

1.2 Primitives basiques

Exercice 4 *Primitives usuelles*) Compléter le tableau suivant

fonction f	une primitive de f	ensemble de définition
$x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$		
$1/x$		
$1/(ax + b), a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$		
$1/(a^2 + x^2), a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$		
$1/\sqrt{a^2 - x^2}, a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$		
$e^{\lambda x}, \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$		
$\cos(\omega x + a), \omega \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$		
$\sin(\omega x + a), \omega \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$		
$\cosh(\omega x + a), \omega \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$		
$\sinh(\omega x + a), \omega \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$		
$\tan(\omega x + a), \omega \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$		
$\tanh(\omega x + a), \omega \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$		

Proof.

fonction f	une primitive de f	ensemble de définition
$x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$	$x^{\alpha+1}/(\alpha+1)$	$\mathbb{R}_{>0}$ (\mathbb{R} , si $\alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, si $\alpha \in \mathbb{Z}_{< -1}$ et $\mathbb{R}_{\geq 0}$, si $\alpha \in]-1, +\infty[\setminus \mathbb{Z}$)
$1/x$	$\ln(x)$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$
$1/(ax+b), a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$	$\frac{1}{a} \ln(ax+b)$	$\mathbb{R} \setminus \{-b/a\}$
$1/(a^2+x^2), a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$	$\arctan(x/a)/a$	\mathbb{R}
$1/\sqrt{a^2-x^2}, a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$	$\arcsin(x/ a)$	$] - a , a [$
$e^{\lambda x}, \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$	$e^{\lambda x}/\lambda$	\mathbb{R}
$\cos(\omega x + a), \omega \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$	$\sin(\omega x + a)/\omega$	\mathbb{R}
$\sin(\omega x + a), \omega \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$	$-\cos(\omega x + a)/\omega$	\mathbb{R}
$\cosh(\omega x + a), \omega \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$	$\sinh(\omega x + a)/\omega$	\mathbb{R}
$\sinh(\omega x + a), \omega \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$	$\cosh(\omega x + a)/\omega$	\mathbb{R}
$\tan(\omega x + a), \omega \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$	$-\ln(\cos(\omega x + a))/\omega$	$\mathbb{R} \setminus \{ \frac{1}{\omega} (\frac{\pi}{2} + k\pi - a), k \in \mathbb{Z} \}$
$\tanh(\omega x + a), \omega \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$	$\ln(\cosh(\omega x + a))/\omega$	\mathbb{R}

□

Exercice 5 Soit $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$. Calculer

$$\int \frac{dx}{(x-a)^n}.$$

Proof. C'est clair que, si $n \neq 1$, alors

$$\int \frac{dx}{(x-a)^n} = -\frac{1}{(n-1)(x-a)^{(n-1)}} + C,$$

et si $n = 1$, alors

$$\int \frac{dx}{(x-a)^n} = \ln(|x-a|) + C,$$

avec domaine de définition $\mathbb{R} \setminus \{a\}$, où $C \in \mathbb{R}$ dénote une constante quelconque. □

Exercice 6 Calculer les primitives et donner leur domaine de définition des fonctions suivantes :

$$(a) \int x\sqrt{x^2+4}dx, (b) \int \frac{x}{\sqrt[3]{x^2+1}}dx, (c) \int xe^{-x^2}dx, (d) \int \frac{dx}{x^2+16}, (e) \int \frac{e^x dx}{1+e^{2x}},$$

$$(f) \int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^4}}, (g) \int \frac{dx}{\sqrt{1-x}}, (h) \int \frac{e^x dx}{\sqrt{16-e^{2x}}}.$$

Proof. Dans les résultats suivants $C \in \mathbb{R}$ dénote une constante quelconque.

1. $\int x\sqrt{x^2+4}dx = \sqrt{(x^2+4)^3}/3 + C$, avec domaine de définition \mathbb{R} .
2. $\int \frac{x}{\sqrt[3]{x^2+1}}dx = \frac{3}{4}\sqrt[3]{(x^2+1)^2} + C$, avec domaine de définition \mathbb{R} .
3. $\int xe^{-x^2}dx = -e^{-x^2}/2 + C$, avec domaine de définition \mathbb{R} .
4. $\int \frac{dx}{x^2+16} = \arctan(x/4)/4 + C$, avec domaine de définition \mathbb{R} .
5. $\int \frac{e^x dx}{1+e^{2x}} = \arctan(e^x) + C$, avec domaine de définition \mathbb{R} .
6. $\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^4}} = \arcsin(x^2)/2 + C$, avec domaine de définition $] -1, 1[$.
7. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = -2\sqrt{1-x} + C$, avec domaine de définition $\mathbb{R}_{<1}$.
8. $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{16-e^{2x}}} = \arcsin(e^x/4) + C$, avec domaine de définition $\mathbb{R}_{<\ln(4)}$.

□

1.3 Calcul de primitives

Pour chaque exercice suivant on calculera une formule exacte pour les primitives des fonctions données et on donnera leur domaine de définition.

Exercice 7 *Intégration par parties*

Écrire la formule d'intégration par parties.

Proof. Si f et g sont deux fonctions définies sur (un intervalle de) \mathbb{R} de classe C^1 , alors

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx.$$

□

Exercice 8 Calculer

$$(a) \int x^n \ln(x)dx \quad (n \in \mathbb{Z}), (b) \int e^{-x} \cos^2(x)dx, (c) \int \arctan(\sqrt{1-x^2})dx.$$

Proof. Dans les résultats suivants $C \in \mathbb{R}$ dénote une constante quelconque.

1. Si $n \neq -1$, on applique une intégration par parties avec $u = \ln(x)$ et $v' = x^n$, i.e. $v = x^{n+1}/(n+1)$:

$$\int x^n \ln(x)dx = \ln(x) \frac{x^{n+1}}{n+1} - \int \frac{x^n}{n+1} dx = \frac{x^{n+1}((n+1)\ln(x) - 1)}{(n+1)^2} + C,$$

avec domaine de définition $\mathbb{R}_{>0}$.

Si $n = -1$, on applique aussi une intégration par parties avec $u = \ln(x)$ et $v' = 1/x$, *i.e.* $v = \ln x$:

$$\int \frac{\ln(x)}{x} dx = \ln^2 x - \int \frac{\ln(x)}{x} dx \Rightarrow \int \frac{\ln(x)}{x} dx = \frac{\ln^2(x)}{2} + C,$$

avec domaine de définition $\mathbb{R}_{>0}$.

2. Si l'on utilise $\cos^2(x) = (1 + \cos(2x))/2$, on trouve que

$$\int e^{-x} \cos^2(x) dx = \frac{1}{2} \left(\int e^{-x} dx + \int e^{-x} \cos(2x) dx \right).$$

Avec deux intégrations par parties, on calcule

$$\begin{aligned} \int e^{-x} \cos(2x) dx &= -e^{-x} \cos(2x) - 2 \int e^{-x} \sin(2x) dx \\ &= -e^{-x} \cos(2x) + 2e^{-x} \sin(2x) - 4 \int e^{-x} \cos(2x) dx \end{aligned}$$

d'où

$$\int e^{-x} \cos(2x) dx = \frac{-e^{-x} \cos(2x) + 2e^{-x} \sin(2x)}{5}$$

et on conclue

$$\int e^{-x} \cos^2(x) dx = -\frac{e^{-x}}{10} (5 + \cos(2x) - 2 \sin(2x)) + C,$$

avec domaine de définition \mathbb{R} .

3. Si l'on fait une intégration par parties avec $u = \arctan(\sqrt{1-x^2})$ et $v' = 1$ (*i.e.* $v = x$), on trouve

$$\int \arctan(\sqrt{1-x^2}) dx = x \arctan(\sqrt{1-x^2}) + \int \frac{x^2 dx}{(2-x^2)\sqrt{1-x^2}}.$$

Si l'on fait la substitution $x = \sqrt{2}z/\sqrt{1+2z^2}$ (*i.e.* $z = x/\sqrt{2-2x^2}$), la dernière intégrale devient

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 dx}{(2-x^2)\sqrt{1-x^2}} &= \sqrt{2} \int \frac{z^2 dz}{(1+z^2)(1+2z^2)} = \sqrt{2} \int dz \left(\frac{1}{z^2+1} - \frac{1}{2z^2+1} \right) \\ &= \sqrt{2} \arctan(z) - \arctan(\sqrt{2}z) + C \\ &= \sqrt{2} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2-2x^2}}\right) - \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) + C. \end{aligned}$$

Si l'on utilise l'identité $\tan(\arcsin(x)) = x/\sqrt{1-x^2}$, alors

$$\int \arctan(\sqrt{1-x^2}) dx = \sqrt{2} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2-2x^2}}\right) + x \arctan(\sqrt{1-x^2}) - \arcsin(x) + C$$

avec domaine de définition $] -1, 1 [$.

□

1.4 (Fractions rationnelles)

La méthode est de décomposer la fraction rationnelle en éléments simples. On est donc ramené à calculer des intégrales de l'un de ces deux types :

$$\int \frac{1}{(x-a)^n} dx, \quad \int \frac{ax+b}{(x^2+cx+d)^n} dx, \quad \text{avec } n \in \mathbb{N}^* \text{ et } c^2 - 4d < 0.$$

Exercice 9 Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction $I_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ via

$$I_n(x) = \int \frac{dx}{(1+x^2)^n}$$

telle que $I_n(0) = 0$. Noter que $I_0(x) = x$. Montrer que, pour tout entier $n \geq 2$,

$$I_n(x) = \frac{x}{2(n-1)(1+x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} I_{n-1}(x).$$

Proof. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On intègre par partie $u = 1/(1+x^2)^{n-1}$ et $v' = 1$:

$$\begin{aligned} I_{n-1}(x) &= \frac{x}{(1+x^2)^{n-1}} + 2(n-1) \int \frac{x^2 dx}{(1+x^2)^n} = \frac{x}{(1+x^2)^{n-1}} + 2(n-1) \int \frac{(1+x^2)dx}{(1+x^2)^n} - 2(n-1) \int \frac{1dx}{(1+x^2)^n} \\ &= \frac{x}{(1+x^2)^{n-1}} + 2(n-1)I_{n-1} - 2(n-1)I_n \end{aligned}$$

ce qui implique le résultat demandé. \square

Exercice 10 En utilisant la décomposition en éléments simples, calculer les primitives suivantes :

$$(a) \int \frac{x^3 dx}{x^2+1}, \quad (b) \int \frac{dx}{x(1+x)^2}, \quad (c) \int \frac{dx}{4x^2-3x+2}, \quad (d) \int \frac{x^2 dx}{x^4-1}, \quad (e) \int \frac{(x-1)dx}{(1+x)^3(x-2)}.$$

Proof. Dans les résultats suivants $C \in \mathbb{R}$ dénote une constante quelconque.

1. C'est clair que

$$\int \frac{x^3 dx}{x^2+1} = \int x dx - \frac{x dx}{x^2+1} = \frac{x^2}{2} - \frac{\ln(x^2+1)}{2} + C$$

2. On voit que

$$\int \frac{dx}{x(1+x)^2} = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} \right) dx = \ln(|x|) - \ln(|x+1|) + \frac{1}{x+1} + C,$$

avec domaine de définition $\mathbb{R} \setminus \{0, -1\}$.

3. C'est clair que

$$\int \frac{dx}{4x^2-3x+2} = \frac{1}{4} \int \frac{dx}{(x-\frac{3}{8})^2 + \frac{23}{64}} = \frac{2 \arctan\left(\frac{8x-3}{\sqrt{23}}\right)}{\sqrt{23}} + C,$$

avec domaine de définition \mathbb{R} .

4. On voit que

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2 dx}{x^4 - 1} &= \int \left(\frac{1}{2(x^2 + 1)} - \frac{1}{4(x + 1)} + \frac{1}{4(x - 1)} \right) dx \\ &= \frac{1}{4} \left(\ln(|x - 1|) - \ln(|x + 1|) + 2 \arctan(x) \right) + C,\end{aligned}$$

avec domaine de définition $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$.

5. On voit que

$$\begin{aligned}\int \frac{(x - 1) dx}{(1 + x)^3(x - 2)} &= \int \left(-\frac{1}{27(x + 1)} - \frac{1}{9(x + 1)^2} + \frac{2}{3(x + 1)^3} + \frac{1}{27(x - 2)} \right) dx \\ &= \frac{1}{9(x + 1)} - \frac{1}{3(x + 1)^2} + \frac{1}{27} \ln(|x - 2|) - \frac{1}{27} \ln(|x + 1|) + C,\end{aligned}$$

avec domaine de définition $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

□

Exercice 11 Calculer

$$\begin{aligned}\text{(a)} \int \frac{dx}{49 - 4x^2}, \text{(b)} \int \frac{(5x - 12) dx}{x(x - 4)}, \text{(c)} \int \frac{(37 - 11x) dx}{(x + 1)(x - 2)(x - 3)}, \text{(d)} \int \frac{(2x^2 - 15x + 33) dx}{(x + 1)(x - 5)}, \\ \text{(e)} \int \frac{(x - 1) dx}{x^2 + x + 1}, \text{(f)} \int \frac{dx}{(x^2 + 4x + 5)^2}.\end{aligned}$$

Proof. Dans les résultats suivants $C \in \mathbb{R}$ dénote une constante quelconque.

1. C'est clair que

$$\int \frac{dx}{49 - 4x^2} = \frac{1}{28} \int \left(\frac{1}{7 + 2x} + \frac{1}{7 - 2x} \right) dx = \frac{1}{28} \ln \left(\left| \frac{2x + 7}{2x - 7} \right| \right) + C,$$

avec domaine de définition $\mathbb{R} \setminus \{\pm 7/2\}$.

2. On voit que

$$\begin{aligned}\int \frac{(5x - 12) dx}{x(x - 4)} &= \int \left(\frac{3}{x} + \frac{2}{x - 4} \right) dx \\ &= 3 \ln(|x|) + 2 \ln(|x - 4|) + C,\end{aligned}$$

avec domaine de définition $\mathbb{R} \setminus \{0, 4\}$.

3. On voit que

$$\begin{aligned}\int \frac{(37 - 11x) dx}{(x + 1)(x - 2)(x - 3)} &= \int \left(-\frac{5}{x - 2} + \frac{4}{x + 1} + \frac{1}{x - 3} \right) dx \\ &= -5 \ln(|x - 2|) + \ln(|x - 3|) + 4 \ln(|x + 1|) + C,\end{aligned}$$

avec domaine de définition $\mathbb{R} \setminus \{-1, 2, 3\}$.

4. C'est clair que

$$\begin{aligned}\int \frac{(2x^2 - 15x + 33) dx}{(x + 1)(x - 5)} &= \int \left(2 + \frac{4}{3(x - 5)} - \frac{25}{3(x + 1)} \right) dx \\ &= 2x + \frac{4}{3} \ln(|x - 5|) - \frac{25}{3} \ln(|x + 1|) + C,\end{aligned}$$

avec domaine de définition $\mathbb{R} \setminus \{-1, 5\}$.

5. On voit que

$$\begin{aligned} \int \frac{(x-1)dx}{x^2+x+1} &= \int \left(\frac{2x+1}{2(x^2+x+1)} - \frac{3}{2(x^2+x+1)} \right) dx \\ &= \int \left(\frac{2x+1}{2(x^2+x+1)} - \frac{6}{(2x+1)^2+3} \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \left(\ln(x^2+x+1) - 2\sqrt{3} \arctan \left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}} \right) \right) + C, \end{aligned}$$

avec domaine de définition \mathbb{R} .

6. Si l'on fait la substitution $y = x + 2$, on voit que

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x^2+4x+5)^2} &= \int \frac{dx}{((x+2)^2+1)^2} = \int \frac{dy}{(y^2+1)^2} \\ &= \int \frac{1+y^2}{(y^2+1)^2} dy - \int \frac{y^2 dy}{(y^2+1)^2} = \arctan(y) - \int \frac{y^2 dy}{(y^2+1)^2}. \end{aligned}$$

La dernière intégrale peut se calculer à partir d'une intégration par parties avec $u = y$ et $v' = -y/(y^2+1)^2$ (i.e. $v = 1/(2(y^2+1))$)

$$- \int \frac{y^2 dy}{(y^2+1)^2} = \frac{1}{2} \frac{y}{y^2+1} - \frac{1}{2} \int \frac{dy}{y^2+1} = \frac{1}{2} \left(\frac{y}{y^2+1} - \arctan(y) \right).$$

Finalement, la primitive est

$$\int \frac{dx}{(x^2+4x+5)^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{x+2}{x^2+4x+5} + \arctan(x+2) \right) + C,$$

avec domaine de définition \mathbb{R} .

□

1.4.1 Polynômes en sinus et cosinus

La méthode est de linéariser sauf dans le cas de $\cos^m(x) \sin^n(x)$ avec $m \in \mathbb{N}$ ou $n \in \mathbb{N}$ impair. Dans ce cas on fait un changement de variables.

Exercice 12 Écrire les primitives de $\cos^m(x) \sin^n(x)$ avec m ou n impair.

Proof. Si m est impair de la forme $m = 2m' + 1$ avec $m' \in \mathbb{N}$, alors

$$\begin{aligned} \int \cos^m(x) \sin^n(x) dx &= \int \cos^{2m'}(x) \sin^n(x) \cos(x) dx = \int (1 - \sin^2(x))^{m'} \sin^n(x) \cos(x) dx \\ &= \sum_{k=0}^{m'} (-1)^k \binom{m'}{k} \int \sin^{n+2k}(x) \cos(x) dx = \sum_{k=0}^{m'} (-1)^k \binom{m'}{k} \frac{\sin^{n+2k+1}(x)}{n+2k+1}. \end{aligned}$$

De façon analogue, si n est impair avec $n = 2n' + 1$ et $n' \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} \int \cos^m(x) \sin^n(x) dx &= \int \cos^m(x) \sin^{2n'}(x) \sin(x) dx = \int (1 - \cos^2(x))^{n'} \cos^m(x) \sin(x) dx \\ &= \sum_{k=0}^{n'} (-1)^k \binom{n'}{k} \int \cos^{m+2k}(x) \sin(x) dx = \sum_{k=0}^{n'} (-1)^{k+1} \binom{n'}{k} \frac{\cos^{m+2k+1}(x)}{m+2k+1}. \end{aligned}$$

□

Exercice 13 Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer

(a) $\int \cos^n(\theta) d\theta$, (b) $\int \sin^n(\theta) d\theta$.

1.4.2 Changement de variables

Exercice 14

1. Écrire le théorème de changement de variables.
2. Écrire le cas particulier des fractions rationnelles en sinus et cosinus (règles de *C. Bioche*).
3. Donner des primitives de $\sqrt{x^2 + 1}$, de $\sqrt{x^2 - 1}$ et de $\sqrt{1 - x^2}$, en utilisant les changements de variable $x = \sinh(u)$ ou $x = \cosh(u)$ ou $x = \sin(u)$.

Proof. Il s'agit des résultats du cours. \square

Exercice 15

- Calculer
- (a) $\int \sin^3(x) dx$, (b) $\int \frac{\sin(x)}{(2 + \cos(x))^2} dx$, (c) $\int \sin(x/2) \cos(x/3) dx$, (d) $\int \frac{1}{1 + \sin^2(x)} dx$,
(e) $\int \frac{dx}{a + b \cos(x)}$, avec $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a > |b| > 0$.

Proof. Dans les résultats suivants $C \in \mathbb{R}$ dénote une constante quelconque.

1. D'après l'exercice 1.4.1, on voit que

$$\int \sin^3(x) dx = \frac{1}{3} (\cos^3(x) - 3 \cos(x)) + C,$$

avec domaine de définition \mathbb{R} .

2. C'est clair que

$$\int \frac{\sin(x)}{(2 + \cos(x))^2} dx = \frac{1}{2 + \cos(x)} + C,$$

avec domaine de définition \mathbb{R} .

3. On voit que

$$\int \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{3}\right) dx = \int \left(\sin\left(\frac{x}{6}\right) + \sin\left(\frac{5x}{6}\right) \right) \frac{dx}{2} = -\frac{3}{5} \left(5 \cos\left(\frac{x}{6}\right) + \cos\left(\frac{5x}{6}\right) \right) + C,$$

avec domaine de définition \mathbb{R} , où l'on a utilisé l'identité

$$\sin(\alpha) \cos(\beta) = (\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta))/2.$$

4. Si l'on fait la substitution $y = \tan(x)$, alors $\sin^2(x) = y^2/(1+y^2)$ et $dx = dy/(1+y^2)$. Cela implique que

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{1 + \sin^2(x)} dx &= \int \frac{1}{1 + 2y^2} dy = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan(\sqrt{2}y) + C \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan(\sqrt{2} \tan(x)) + C, \end{aligned}$$

avec domaine de définition $] -\pi/2, \pi/2 [$.

5. Si l'on fait la substitution $y = \tan(x/2)$ (*i.e.* $\cos(x) = (1 - y^2)/(1 + y^2)$), alors $dx = 2dy/(1 + y^2)$ et

$$\int \frac{dx}{a + b \cos(x)} = \int \frac{2dy}{(a + b) + (a - b)y^2} = \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \arctan\left(\sqrt{\frac{a - b}{a + b}} \tan(x/2)\right) + C,$$

avec domaine de définition $] -\pi, \pi [$.

□

Exercice 16 Calculer

$$(a) \int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}, (b) \int \frac{\sqrt{x}dx}{(x-1)^2}, (c) \int \frac{x\sqrt{x}dx}{(x+1)^2}.$$

Proof. Dans les résultats suivants $C \in \mathbb{R}$ dénote une constante quelconque.

1. $\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} = 2 \arctan(\sqrt{x}) + C$, avec domaine de définition $\mathbb{R}_{>0}$ (appliquer la substitution $u = \sqrt{x}$).
2. On utilise la substitution $y = \sqrt{x}$. Cela nous donne

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{x}dx}{(x-1)^2} &= 2 \int \frac{y^2 dx}{(y^2-1)^2} \\ &= 2 \int \left(\frac{1}{4(y+1)^2} - \frac{1}{4(y+1)} + \frac{1}{4(y-1)^2} + \frac{1}{4(y-1)} \right) dy \\ &= \frac{1}{2} \left(\ln \left(\left| \frac{y-1}{y+1} \right| \right) - \frac{2y}{y^2-1} \right) + C \\ &= \frac{1}{2} \left(\ln \left(\left| \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} \right| \right) - \frac{2\sqrt{x}}{x-1} \right) + C, \end{aligned}$$

avec domaine de définition $\mathbb{R}_{>0} \setminus \{1\}$.

3. On utilise la substitution $y = \sqrt{x}$. Cela nous donne

$$\begin{aligned} \int \frac{x\sqrt{x}dx}{(x+1)^2} &= 2 \int \frac{y^4 dx}{(y^2+1)^2} = 2 \int \left(1 + \frac{1}{(y^2+1)^2} - \frac{2}{y^2+1} \right) dy \\ &= 2y + \left(\frac{y}{1+y^2} + \arctan(y) \right) - 4 \arctan(y) + C \\ &= \frac{\sqrt{x}(2x+3)}{1+x} - 3 \arctan(\sqrt{x}) + C, \end{aligned}$$

où l'on a utilisé l'exercice 1.4. Le domaine de définition respectif est $\mathbb{R}_{>0}$.

□

Exercice 17 *Primitives de fonctions du type $f(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})$* Par un changement de variables, se ramener à une forme canonique du type $f(x, \sqrt{x^2 + 1})$, $f(x, |x - 1|)$, $f(x, \sqrt{x^2 - 1})$ ou $f(x, \sqrt{1 - x^2})$, puis effectuer un autre changement de variables avec les fonctions sinus/cosinus trigonométriques ou hyperboliques.

Calculer

$$(a) \int \frac{dx}{(1-x)\sqrt{1-x^2}}, (b) \int \sqrt{x^2 - 3x + 2} dx, \\ (c) \int \sqrt{x^2 + x + 1} dx, (d) \int \sqrt{-x^2 + x + 1} dx.$$

Proof. Dans les résultats suivants $C \in \mathbb{R}$ dénote une constante quelconque.

1. Le changement de variable $x = \sin y$ nous dit que

$$\int \frac{dx}{(1-x)\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{\cos y dy}{(1-\sin y)\cos y} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{1 - \frac{2t}{1+t^2}}$$

où l'on a fait le changement de variable $t = \tan \frac{y}{2}$ (règle de Bioche). On a donc

$$\int \frac{dx}{(1-x)\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{2dt}{(1-t)^2} = \frac{2}{1-t} + C = \frac{2}{1 - \tan \frac{\arcsin x}{2}} + C$$

avec domaine de définition $] -1, 1[$. Ceci peut se transformer en écrivant :

$$\begin{aligned} \tan \frac{\arcsin x}{2} &= \frac{\sin \frac{\arcsin x}{2} \cos \frac{\arcsin x}{2}}{\cos^2 \frac{\arcsin x}{2}} = \frac{\sin \arcsin x}{\cos \arcsin x + 1} = \frac{x}{\sqrt{1 - \sin^2 \arcsin x} + 1} \\ &= \frac{x}{\sqrt{1 - x^2} + 1}. \end{aligned}$$

2. Le changement de variable $2x - 3 = \cosh y$ nous dit que

$$\begin{aligned} \int \sqrt{x^2 - 3x + 2} dx &= \int \sqrt{\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}} dx = \frac{1}{4} \int \sqrt{(2x - 3)^2 - 1} (2dx) = \frac{1}{4} \int \sinh^2 y dy \\ &= \frac{e^{2y} - e^{-2y}}{32} - \frac{y}{8} + C = \frac{\sinh 2 \operatorname{arcosh}(2x - 3)}{16} - \frac{\operatorname{arcosh}(2x - 3)}{8} + C \end{aligned}$$

avec domaine de définition $[2, +\infty[$. Pour avoir une primitive sur $] -\infty, 1[$ il faut poser $-2x + 3 = \cosh y$.

3. Le changement de variable $\frac{2x + 1}{\sqrt{3}} = \sinh y$ nous dit que

$$\begin{aligned} \int \sqrt{x^2 + x + 1} dx &= \int \sqrt{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} dx = \frac{3}{4} \int \sqrt{\left(\frac{2x + 1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} \left(\frac{2dx}{\sqrt{3}}\right) \\ &= \frac{3}{4} \int \cosh^2 y dy = 3 \frac{e^{2y} - e^{-2y}}{32} + \frac{3y}{8} + C \\ &= \frac{3 \sinh 2 \operatorname{arsinh} \frac{2x+1}{\sqrt{3}}}{16} + \frac{3 \operatorname{arsinh} \frac{2x+1}{\sqrt{3}}}{8} + C \end{aligned}$$

avec domaine de définition \mathbb{R} .

4. Le changement de variable $\frac{2x - 1}{\sqrt{5}} = \sin y$ nous dit que

$$\begin{aligned} \int \sqrt{-x^2 + x + 1} dx &= \int \sqrt{\frac{5}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2} dx = \frac{5}{4} \int \sqrt{1 - \left(\frac{2x - 1}{\sqrt{5}}\right)^2} \frac{2dx}{\sqrt{5}} = \frac{5}{4} \int \cos^2 y dy \\ &= \frac{5}{16} \sin 2y + \frac{5}{8} y + C = \frac{5}{16} \sin 2 \arcsin \frac{2x - 1}{\sqrt{5}} + \frac{5}{8} \arcsin \frac{2x - 1}{\sqrt{5}} + C, \end{aligned}$$

avec domaine de définition $[1 - \sqrt{5})/2, (1 + \sqrt{5})/2]$.

□

Exercice 18

1. Montrer qu'une primitive de $x \mapsto P(x)e^{ax}$, où $P \in \mathbb{R}[X]$ est un polynôme et a un réel, est de la forme $x \mapsto Q(x)e^{ax} + C$, où $Q \in \mathbb{R}[X]$ est un polynôme et C est une constante.
2. Montrer qu'une primitive de $x \mapsto P(x) \cos(\alpha x)$, où $P \in \mathbb{R}[X]$ est un polynôme et α un réel, est de la forme $x \mapsto Q_1(x) \cos(\alpha x) + Q_2(x) \sin(\alpha x) + C$, où Q_1 et Q_2 sont des polynômes dans $\mathbb{R}[X]$ et C est une constante.

Proof.

1. On procède par récurrence sur le degré de P . Si $\deg(P) \leq 0$, alors $P = c \in \mathbb{R}$ et on pose $Q(x) = c/a$. On suppose que l'énoncé est vrai pour tout polynôme P de degré strictement inférieur à $d \in \mathbb{N}^*$. On va le démontrer pour le cas où P a degré d . Comme $(Q(x)e^{ax} + C)' = (Q'(x) + aQ(x))e^{ax}$, il suffit de montrer qu'il existe un polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $Q'(x) + aQ(x) = P(x)$. Soit $P = cx^d + \bar{P}$, avec $c \neq 0$ et \bar{P} de degré strictement inférieur à d . On pose $R = cx^d/a$. C'est clair que $R' + aR - P$ est un polynôme de degré strictement inférieur à d . Par l'hypothèse de la récurrence, on sait qu'il existe un polynôme T tel que $T' + aT = R' + aR - P$. Alors $Q = R - T$ satisfait la propriété demandée.
2. Le même argument que celui donné pour l'item précédent est aussi valable dans ce cas.

□

2 Algèbres de Boole de parties d'un ensemble et mesures

Exercice 19 Soit X un ensemble. On rappelle qu'une **algèbre de Boole de parties** de X (ou simplement **algèbre de Boole**, ou **algèbre d'ensembles**) est une paire (X, \mathcal{A}) , où $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ est une famille de parties de X qui satisfait que $\emptyset, X \in \mathcal{A}$ et que, pour tous $A, B \in \mathcal{A}$, $A \cup B \in \mathcal{A}$, $A \cap B \in \mathcal{A}$ et $A \setminus B \in \mathcal{A}$.¹ Soit (X, \mathcal{A}) une algèbre de Boole. On définit $A + B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ et $A \cdot B = A \cap B$, pour tous $A, B \in \mathcal{A}$. Montrer que $(\mathcal{A}, +, \cdot)$ est un anneau (unitaire) commutatif.

Proof. C'est clair que $+, \cdot : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ sont deux lois internes commutatives. Comme l'intersection d'ensembles est associative, le produit \cdot est associatif aussi. En outre, $+$ est associative. En effet, cela suit du fait que

$$A + (B + C) = (A \setminus (B \cup C)) \cup (B \setminus (A \cup C)) \cup (C \setminus (A \cup B)) \cup (A \cap B \cap C),$$

pour tous $A, B, C \in \mathcal{A}$. Cette dernière égalité suit de

$$\begin{aligned} A \setminus (B + C) &= A \setminus ((B \cup C) \setminus (B \cap C)) = A \cap ((B \cup C)^c \cup (B \cap C)) \\ &= (A \cap (B \cup C)^c) \cup (A \cap (B \cap C)) = (A \setminus (B \cup C)) \cup (A \cap B \cap C), \end{aligned}$$

où $D^c = X \setminus D$, pour tout $D \subseteq X$, et

$$(B + C) \setminus A = ((B \setminus C) \cup (C \setminus B)) \setminus A = (B \setminus (A \cup C)) \cup (C \setminus (A \cup B)).$$

On voit bien que \emptyset est l'élément neutre pour la somme $+$ et l'ensemble X est l'unité pour le produit \cdot . Il reste à vérifier la propriété distributive, *i.e.*

$$A \cdot (B + C) = (A \cdot B) + (A \cdot C),$$

pour tous $A, B, C \in \mathcal{A}$. En effet,

$$\begin{aligned} A \cdot (B + C) &= A \cap ((B \setminus C) \cup (C \setminus B)) = (A \cap (B \setminus C)) \cup (A \cap (C \setminus B)) \\ &= ((A \cap B) \setminus C) \cup ((A \cap C) \setminus B) = ((A \cap B) \setminus (A \cap C)) \cup ((A \cap C) \setminus (A \cap B)) \\ &= (A \cap B) + (A \cap C) = (A \cdot B) + (A \cdot C), \end{aligned}$$

où l'on a utilisé la distributivité de l'intersection par rapport à l'union dans la deuxième égalité. \square

Exercice 20 Donner une algèbre de Boole $(\mathbb{R}, \mathcal{A})$ telle que les singletons ne soient pas inclus dans \mathcal{A} .

Proof. On peut prendre $\mathcal{A} = \{\emptyset, \mathbb{R}\}$. \square

Exercice 21 Soient (X, \mathcal{A}) et (Y, \mathcal{B}) deux algèbres de Boole. On rappelle qu'un **morphisme** $f : (X, \mathcal{A}) \rightarrow (Y, \mathcal{B})$ est une application $f : X \rightarrow Y$ qui satisfait que $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$, pour tout $B \in \mathcal{B}$.

1. Soient (X, \mathcal{A}) une algèbre de Boole et $f : X \rightarrow Y$ une application. On définit $f_*(\mathcal{A}) = \{B \subseteq Y : f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}$. Montrer que $(Y, f_*(\mathcal{A}))$ est une algèbre de Boole, appelée **l'image directe** de \mathcal{A} , et que f est un morphisme d'algèbres de Boole de (X, \mathcal{A}) dans $(Y, f_*(\mathcal{A}))$.

1. Plusieurs auteurs n'imposent pas la condition $X \in \mathcal{A}$ dans la définition d'algèbre d'ensembles, car ils veulent considérer après seulement des parties de mesure finie.

2. Soient (Y, \mathcal{B}) une algèbre de Boole et $f : X \rightarrow Y$ une application. On définit $f^*(\mathcal{B}) = \{f^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}\}$. Montrer que $(X, f^*(\mathcal{B}))$ est une algèbre de Boole, appelée **l'image inverse** de \mathcal{B} , et que f est un morphisme d'algèbres de Boole de $(X, f^*(\mathcal{B}))$ dans (Y, \mathcal{B}) .
3. Soient (X, \mathcal{A}) et (Y, \mathcal{B}) deux algèbres de Boole et $f : X \rightarrow Y$ une application. Montrer que $f^*(\mathcal{B}) \subseteq \mathcal{A}$ si et seulement si f est un morphisme d'algèbres de Boole de (X, \mathcal{A}) dans (Y, \mathcal{B}) , si et seulement si $\mathcal{B} \subseteq f_*(\mathcal{A})$.

Proof.

1. C'est clair que $\emptyset = f^{-1}(\emptyset) \in \mathcal{A}$, ce qui implique que $\emptyset \in f_*(\mathcal{A})$. De même, la condition $X \in \mathcal{A}$ avec $X = f^{-1}(Y)$ nous disent que $Y \in f_*(\mathcal{A})$. En outre, soient $B, B' \in f_*(\mathcal{A})$. Alors, $f^{-1}(B \cup B') = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B')$, $f^{-1}(B \cap B') = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B')$ et $f^{-1}(B \setminus B') = f^{-1}(B) \setminus f^{-1}(B')$ sont des éléments de \mathcal{A} , ce qui implique que $B \cup B', B \cap B', B \setminus B' \in f_*(\mathcal{A})$, comme on voulait démontrer. Le fait que f est un morphisme d'algèbres de Boole est immédiat.
2. C'est clair que $\emptyset = f^{-1}(\emptyset) \in f^*(\mathcal{B})$, vu que $\emptyset \in \mathcal{B}$. De même, la condition $Y \in \mathcal{B}$ avec $X = f^{-1}(Y)$ nous disent que $X \in f^*(\mathcal{B})$. En outre, soient $A = f^{-1}(B)$ et $A' = f^{-1}(B')$, avec $B, B' \in \mathcal{B}$. Alors, $A \cup A' = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B') = f^{-1}(B \cup B')$, $A \cap A' = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B') = f^{-1}(B \cap B')$ et $A \setminus A' = f^{-1}(B) \setminus f^{-1}(B') = f^{-1}(B \setminus B')$ sont des éléments de $f^*(\mathcal{B})$, comme on voulait démontrer. Le fait que f est un morphisme d'algèbres de Boole est immédiat.
3. Il s'agit d'une conséquence directe des définitions.

□

Exercice 22 Soient (X, \mathcal{A}) et (Y, \mathcal{B}) deux algèbres de Boole. On définit $\mathcal{A} \boxtimes \mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X \times Y)$ comme l'ensemble formé des unions des familles finies et disjointes des parties de la forme $A \times B$, avec $A \in \mathcal{A}$ et $B \in \mathcal{B}$. Montrer que $(X \times Y, \mathcal{A} \boxtimes \mathcal{B})$ est une algèbre de Boole.

Proof. C'est clair que $\emptyset = \emptyset \times \emptyset \in \mathcal{A} \boxtimes \mathcal{B}$. En outre, les conditions $X \in \mathcal{A}$ et $Y \in \mathcal{B}$ nous disent que $X \times Y \in \mathcal{A} \boxtimes \mathcal{B}$. Comme

$$(A \times B) \cap (A' \times B') = (A \cap A') \times (B \cap B'),$$

pour tous $A, A' \in \mathcal{A}$ et $B, B' \in \mathcal{B}$, on conclut que l'intersection de deux éléments dans $\mathcal{A} \boxtimes \mathcal{B}$ appartient à $\mathcal{A} \boxtimes \mathcal{B}$. Il reste à montrer que la différence entre deux éléments dans $\mathcal{A} \boxtimes \mathcal{B}$ appartient à $\mathcal{A} \boxtimes \mathcal{B}$. Pour cela, il suffit de démontrer que $(A \times B) \setminus (A' \times B') \in \mathcal{A} \boxtimes \mathcal{B}$, pour tous $A, A' \in \mathcal{A}$ et $B, B' \in \mathcal{B}$. Cette dernière propriété suit de l'égalité

$$(A \times B) \setminus (A' \times B') = ((A \setminus A') \times B) \sqcup ((A \cap A') \times (B \setminus B')),$$

et l'on remarque que l'union précédente est disjointe. C'est clair que la réunion finie d'éléments dans $\mathcal{A} \boxtimes \mathcal{B}$ est aussi dans $\mathcal{A} \boxtimes \mathcal{B}$, puisque, si P et Q sont deux éléments de $\mathcal{A} \boxtimes \mathcal{B}$, alors $P \cup Q = (P \setminus Q) \sqcup Q$, où l'union précédente est disjointe. □

Exercice 23 Soit (X, \mathcal{A}) une algèbre de Boole. On rappelle qu'une **mesure** sur \mathcal{A} est une application $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty]$ telle que $\mu(\emptyset) = 0$ et

$$\mu\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \sum_{i \in I} \mu(A_i),$$

pour toute famille disjointe $(A_i)_{i \in I} \in \mathcal{A}^I$ (i.e. $A_i \cap A_{i'} = \emptyset$ si $i \neq i'$) avec I au plus dénombrable telle que $\cup_{i \in I} A_i \in \mathcal{A}$. Si dans la définition précédente I est seulement fini, on dit que μ est une application **additive**. Soient (X, \mathcal{A}) et (Y, \mathcal{B}) deux algèbres de Boole et $f : X \rightarrow Y$ un morphisme d'algèbres de Boole. Montrer que, si $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty]$ est une mesure sur \mathcal{A} , l'application $f_*\mu : \mathcal{B} \rightarrow [0, +\infty]$ donnée par $B \mapsto \mu(f^{-1}(B))$ est une mesure sur \mathcal{B} , appelée **l'image directe** de μ .

Proof. On voit bien que

$$f_*\mu(\emptyset) = \mu(f^{-1}(\emptyset)) = \mu(\emptyset) = 0.$$

En plus, soit $(B_i)_{i \in \mathbb{N}} \in (f_*\mathcal{A})^{\mathbb{N}}$ qui satisfait que $B_i \cap B_{i'} = \emptyset$ si $i \neq i'$ et que $\cup_{i \in \mathbb{N}} B_i \in f_*\mathcal{A}$. Alors, $(f^{-1}(B_i))_{i \in \mathbb{N}} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ satisfait que $f^{-1}(B_i) \cap f^{-1}(B_{i'}) = f^{-1}(B_i \cap B_{i'}) = \emptyset$ si $i \neq i'$ et que $\cup_{i \in \mathbb{N}} f^{-1}(B_i) = f^{-1}(\cup_{i \in \mathbb{N}} B_i) \in \mathcal{A}$. En plus,

$$f_*\mu\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i\right) = \mu\left(f^{-1}\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i\right)\right) = \mu\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} f^{-1}(B_i)\right) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(f^{-1}(B_i)) = \sum_{i \in \mathbb{N}} f_*\mu(B_i),$$

comme on voulait démontrer. \square

Exercice 24 Soient (X, \mathcal{A}) et (Y, \mathcal{B}) deux algèbres de Boole, munies des applications additives μ et ν , respectivement. Montrer qu'il existe une unique application additive $\mu \boxtimes \nu : \mathcal{A} \boxtimes \mathcal{B} \rightarrow [0, +\infty]$ telle que

$$(\mu \boxtimes \nu)(A \times B) = \mu(A)\nu(B), \quad (2)$$

pour tous $A \in \mathcal{A}$ et $B \in \mathcal{B}$.

Proof. Soit $P \in \mathcal{A} \boxtimes \mathcal{B}$. Si $P = \emptyset$, on pose $\mu \boxtimes \nu(P) = 0$. Cette condition est compatible avec (2), car $A \times B = \emptyset$, avec $A \in \mathcal{A}$ et $B \in \mathcal{B}$, si $A = \emptyset$ ou $B = \emptyset$. Si $P \neq \emptyset$, on peut l'écrire de la forme comme une union disjointe

$$P = \bigsqcup_{i \in I} A_i \times B_i,$$

avec I fini, $A_i \in \mathcal{A}$ et $B_i \in \mathcal{B}$. On pose dans ce cas

$$(\mu \boxtimes \nu)(P) = \sum_{i \in I} \mu(A_i)\nu(B_i).$$

On va montrer que cette expression est bien définie. En effet, on suppose que

$$P = \bigsqcup_{j \in J} C_j \times D_j,$$

avec J fini, $C_j \in \mathcal{A}$ et $D_j \in \mathcal{B}$. Alors,

$$\begin{aligned} P &= P \cap P = \left(\bigsqcup_{i \in I} A_i \times B_i\right) \cap \left(\bigsqcup_{j \in J} C_j \times D_j\right) = \bigsqcup_{(i,j) \in I \times J} ((A_i \times B_i) \cap (C_j \times D_j)) \\ &= \bigsqcup_{(i,j) \in I \times J} ((A_i \cap C_j) \times (B_i \cap D_j)). \end{aligned}$$

On voit bien que

$$\sum_{i \in I} \mu(A_i)\nu(B_i) = \sum_{(i,j) \in I \times J} \mu(A_i \cap C_j)\nu(B_i \cap D_j) = \sum_{j \in J} \mu(C_j)\nu(D_j),$$

comme on voulait démontrer. C'est clair que $\mu \boxtimes \nu$ est additive. \square

2.1 Intégration basique

Exercice 25 Étant donnés $a < b$ nombres réels, on pose $\text{St}([a, b], \mathbb{C})$ l'espace vectoriel de *fonctions en escalier*, i.e. les fonctions $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ telles qu'il existe une *subdivision* $P = \{a = a_0 < \dots < a_n = b\} \subseteq [a, b]$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $f|_{]a_i, a_{i+1}[}$ soit une constante c_i , pour tout $i \in \{0, \dots, n-1\}$. On regarde $\text{St}([a, b], \mathbb{C})$ comme un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel normé complet $B([a, b], \mathbb{C})$ formé des fonctions bornées, muni de la norme infini $\| \cdot \|_\infty$.

1. Si f est une fonction en escalier avec subdivision $P = \{a = a_0 < \dots < a_n = b\}$

on définit la valeur $I(f) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i(a_{i+1} - a_i) \in \mathbb{C}$, où $c_i = f|_{]a_i, a_{i+1}[}$, pour tout

$i \in \{0, \dots, n-1\}$. Montrer que $I(f)$ est indépendante de la subdivision de f et que l'application $I : \text{St}([a, b], \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$ est linéaire.

2. Montrer que

$$|I(f)| \leq (b-a) \cdot \|f\|_\infty,$$

pour tout $f \in \text{St}([a, b], \mathbb{C})$, i.e. l'application linéaire $I : \text{St}([a, b], \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$ est continue pour la norme infini. En conséquence, I s'étend en une unique application linéaire continue $\bar{I} : \overline{\text{St}([a, b], \mathbb{C})} \rightarrow \mathbb{C}$ telle que $|\bar{I}(f)| \leq (b-a) \cdot \|f\|_\infty$, pour tout $f \in \overline{\text{St}([a, b], \mathbb{C})}$, où $\overline{\text{St}([a, b], \mathbb{C})}$ est l'adhérence de $\text{St}([a, b], \mathbb{C})$ dans $B([a, b], \mathbb{C})$.

On appelle $\overline{\text{St}([a, b], \mathbb{C})}$ l'espace des *fonctions réglées* ou *intégrables (au sens réglé)*, et on

écrit $\bar{I}(f) = \int_a^b f(x) dx$.²

Proof. Il s'agit d'un résultat du cours. \square

Exercice 26 Fonctions en escalier Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que f ne prenne qu'un nombre fini de valeurs. On note $\Gamma = f([a, b])$. On suppose $|\Gamma| \geq 2$.

On suppose de plus que f admet en tout point une limite à droite et une limite à gauche.

1. Soit $\epsilon_0 = \min\{|y - y'| : y, y' \in \Gamma, y \neq y'\}$. Montrer que $\epsilon_0 > 0$.
2. Montrer que pour tout $x \in [a, b[$, il existe $\eta > 0$ tel que la restriction de f à $]x, x + \eta[\cap [a, b]$ est constante de valeur $f(x+)$.
3. Si $x \in]a, b[$, on définit $I_x = \{y \in]x, b] : f(y) \neq f(x+)\}$. Si $I_x \neq \emptyset$, on note \bar{x} la borne inférieure de I_x . Si $I_x = \emptyset$, on note $\bar{x} = b$. Montrer que $\bar{x} > x$ et que la restriction de f à $]x, \bar{x}[$ est constante. Montrer que si $\bar{x} \neq b$, $f(\bar{x}) \neq f(x+)$ ou $f(\bar{x}+) \neq f(x+)$.
4. On définit par récurrence la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $x_0 = a$ et si $x_n \neq b$, $x_{n+1} = \bar{x}_n$. Si $x_n = b$, $x_{n+1} = b$. Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $x_N = b$. En déduire que f est une fonction en escalier.
5. Montrer que la conclusion de la question précédente est fausse si on enlève l'hypothèse d'existence de limites.

2. Cette notion d'intégrabilité n'est pas précisément celle de Riemann (i.e. les fonctions $f \in B([a, b], \mathbb{C})$ telles que, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $g, h \in \text{St}([a, b], \mathbb{C})$ telles que $|f(x) - g(x)| \leq h(x)$, pour tout $x \in [a, b]$, et $I(h) \leq \epsilon$). Plus précisément, toute fonction réglée est intégrable au sens de Riemann, mais la réciproque n'est pas vraie (e.g., $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(1 + 1/n) = 1$, si $n \in \mathbb{N}^*$, et zéro sinon), mais la théorie de fonctions réglées satisfait des propriétés plus "raisonnables" que celles de la théorie standard de Riemann. C'est pour cela que plusieurs mathématiciens proposent que la notion d'intégrale réglée remplace celle de Riemann (voir Berberian, S. K. Classroom Notes : Regulated Functions : Bourbaki's Alternative to the Riemann Integral. Amer. Math. Monthly **86** (1979), no. 3, 208–211).

Proof. Il s'agit d'un résultat du cours. \square

Exercice 27 Une fonction continue est limite uniforme d'une suite croissante de fonctions en escalier Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

1. Soit $\omega_n(f) = \sup\{|f(x) - f(y)| : x, y \in [0, 1], |x - y| \leq 1/n\}$. Montrer que $\omega_n(f)$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.
2. Soit σ_n la subdivision donnée par $\{j/2^n : j \in \{0, \dots, 2^n\}\}$. Montrer que σ_{n+1} est plus fine que σ_n .
3. On définit la suite g_n de fonctions en escalier de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} de la façon suivante. Pour $0 \leq k < 2^n$ et $x \in [k/2^n, (k+1)/2^n[$, on pose

$$g_n(x) = \inf \left\{ f(y) : y \in \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n} \right] \right\}.$$

En plus, on définit $g_n(1) = f(1)$. Montrer que $g_n \leq g_{n+1}$.

4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in [0, 1]$, $|g_n(x) - f(x)| \leq \omega_{2^n}(f)$. En déduire que la suite $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f .
5. Comment feriez-vous pour construire une suite décroissante de fonctions en escalier convergeant uniformément vers f ?

Proof. Il s'agit d'un résultat du cours. \square

Exercice 28 Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in ([0, 1] \setminus \mathbb{Q}) \cup \{0\}, \\ 1/q, & \text{si } x = p/q \text{ avec } p, q \in \mathbb{N}^*, p \leq q \text{ et PGCD}(p, q) = 1. \end{cases}$$

1. Soit $x \notin \mathbb{Q}$ et soit $(p_n/q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de rationnels tendant vers x . Soit $\mathcal{F}_N = \{p/q \in [0, 1] : 0 < q \leq N, p \in \mathbb{N}\}$.
 - (i) Montrer que \mathcal{F}_N est un ensemble fini.
 - (ii) En déduire qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que $|x - y| > \epsilon$, pour tout $y \in \mathcal{F}_N$.
 - (iii) En déduire qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $q_n > N$, pour tout $n \geq n_0$.
 - (iv) En déduire que la suite $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.
2. Montrer que f est continue en tout point de $[0, 1] \setminus \mathbb{Q}$ et en 0, et elle est discontinue en tout point de $\mathbb{Q} \cap]0, 1]$.
3. Soit $\epsilon > 0$ et $\mathcal{F}'_\epsilon = \{x \in [0, 1] : f(x) > \epsilon\}$.
 - (i) Montrer que \mathcal{F}'_ϵ est fini.
 - (ii) Construire une fonction en escalier g_ϵ telle que $\|g_\epsilon - f\|_\infty < \epsilon$.
 - (iii) Que vaut $\int_0^1 g_\epsilon(x) dx$?
4. La fonction f est-elle continue par morceaux ?

Proof. La solution suit directement des indications détaillées dans l'exercice. \square

Exercice 29 Soit $x \in \mathbb{R}$.

1. Donner la nature des suites
 - (i) $(1 + \frac{x}{n})^n$, (ii) $n \sin(\frac{x}{n})$.

2. Étudier la convergence uniforme sur \mathbb{R} ou sur les compacts de \mathbb{R} .

Proof.

1. C'est clair pour $x = 0$, et pour $x \neq 0$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \exp\left(n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \exp\left(n\left(\frac{x}{n} + o\left(\frac{x}{n}\right)\right)\right) = e^x. \quad (3)$$

En outre, si $x \neq 0$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \sin(x/n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} x \frac{\sin(x/n)}{x/n} = x \quad (4)$$

et si $x = 0$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \sin(x/n) = 0 = x. \quad (5)$$

2. La convergence n'est pas uniforme sur \mathbb{R} . En effet, pour la première suite on considère la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ donnée par $x_n = n$. Elle satisfait que $(1 + x_n/n)^n = 2^n$. Comme $|2^n - e^n|$ converge vers $+\infty$, on voit bien que la convergence n'est pas uniforme. De même, pour la deuxième suite on observe que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ donnée par $x_n = n\pi$ vérifie que $n \sin(x_n/n) = 0$. Comme $|n \sin(\pi) - n| = n$ converge vers $+\infty$, on voit bien que la convergence n'est pas uniforme.

Sur les compacts, il suffit de démontrer la convergence uniforme sur $[-R, R]$ pour $R > 0$ fixé. D'après le développement limité de $\ln(1 + y)$ au voisinage de 0, on sait qu'il existe $\eta > 0$ tel que $|\ln(1 + y) - y| \leq y^2$ pour tout $y \in [-\eta, \eta]$. Ainsi, pour tout $n \geq N$ où N est fixé tel que $R/N \leq \eta$, on peut appliquer cette égalité à x/n , quelque soit $x \in [-R, R]$:

$$\left|n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) - x\right| \leq \frac{x^2}{n} \leq \frac{R^2}{n}.$$

Cette inégalité nous permet aussi de dire que

$n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) \in [-R - R^2/n, R + R^2/n] \subset [-R - R^2, R + R^2]$ ce qui est utile pour l'inégalité des accroissements finis appliquées à la fonction exponentielle

$$\begin{aligned} \left|\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n - e^x\right| &= \left|\exp\left(n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)\right) - \exp(x)\right| \leq \left(\sup_{y \in [-R - R^2, R + R^2]} |e^y|\right) \left|n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) - x\right| \\ \sup_{x \in [-R, R]} \left|\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n - e^x\right| &\leq \frac{R^2 e^{R+R^2}}{n} \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

On raisonne de même pour (ii), mais en utilisant que $|\sin y - y| \leq y^2$ pour tout $y \in [-\eta, \eta]$. Ainsi, pour tout $n \geq N$ où N est fixé tel que $R/N \leq \eta$, on peut appliquer cette égalité à x/n , quelque soit $x \in [-R, R]$:

$$\left|n \sin \frac{x}{n} - x\right| \leq \frac{x^2}{n} \leq \frac{R^2}{n} \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow \infty.$$

Dans les deux cas, nous avons donc la convergence uniforme sur tout compact.

□

Exercice 30 Donner la nature des séries numériques

(a) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta(n)}$, avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

Proof.

1. On remarque d'abord que $\ln(n) \geq 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$. Cela nous dit que, si $\alpha > 1$, alors

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha} \ln^{\beta}(n)} \leq \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}},$$

qui converge par le critère de Riemann.

Pour $\alpha < 1$, nous considérons $\gamma = \frac{1+\alpha}{2} \in]\alpha, 1[$ ainsi $\frac{1}{n^{\alpha} \ln^{\beta}(n)} \geq \frac{1}{n^{\gamma} \ln^{\beta}(n)} \geq \frac{C}{n^{\gamma}}$

et donc la série $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha} \ln^{\beta}(n)}$ diverge.

Pour $\alpha = 1$, par décroissance de la fonction $f(x) = 1/(x \ln^{\beta} x)$ on a

$$\int_3^{N+1} f(x) dx \leq \sum_{n=3}^N f(n) \leq \int_2^N f(x) dx.$$

En calculant $\int_2^N f(x) dx = -\frac{1}{\beta-1} \frac{1}{\ln^{\beta-1} N} + \frac{1}{\beta-1} \frac{1}{\ln^{\beta-1} 2}$ pour $\beta \neq 1$ et $\int_2^N f(x) dx = \ln \ln N - \ln \ln 2$, nous concluons que la série converge si et seulement si $\beta > 1$.

2. Comme la suite $(1/\sqrt{n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante avec limite zéro, le théorème des séries alternées nous dit que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ est convergente.

□

Exercice 31 Donner la nature des séries de fonctions suivantes

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2}$, (c) $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \cos(3^n x)$.

Préciser les intervalles sur lesquels la convergence est uniforme.

Proof.

1. Le critère de D'Alembert nous dit que le rayon de convergence de la série entière est $+\infty$. Cela implique que la série converge uniformément sur tout intervalle fini de \mathbb{R} . Par contre, la série ne converge pas uniformément sur \mathbb{R} .
2. Comme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sin(nx)}{n^2} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2},$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$, et la dernière série numérique converge, le critère de Weierstrass

nous dit que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(nx)/n^2$ converge absolument et uniformément sur \mathbb{R} .

3. Comme

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{\cos(3^n x)}{2^n} \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n},$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$, et la dernière série numérique converge, le critère de Weierstrass

nous dit que la série $\sum_{n=0}^{\infty} \cos(3^n x)/2^n$ converge absolument et uniformément sur \mathbb{R} .

□

Exercice 32 On considère la fonction $f : [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = x^{-2}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On découpe l'intervalle $[1, 2]$ en n intervalles égaux. Les bornes des intervalles sont définies à l'aide des points $x_i = (n+i)/n$, pour $0 \leq i \leq n$.

1. Que représente la somme

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i)$$

pour $n \in \mathbb{N}^*$?

2. Montrer que

$$S_n = n \sum_{i=1}^n \frac{1}{(n+i)^2},$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

3. Démontrer que

$$n \sum_{i=1}^n \frac{1}{(n+i)(n+i+1)} < S_n < n \sum_{i=1}^n \frac{1}{(n+i-1)(n+i)},$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

4. En déduire que

$$\frac{n^2}{(n+1)(2n+1)} < S_n < \frac{1}{2},$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Indication : remarquer que

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}.$$

5. En déduire que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{2}.$$

6. Calculer $\int_1^2 f(x)dx$.

Proof. La solution suit directement des indications détaillées dans l'exercice. \square

Exercice 33 *Autour des mesures de réunion finie d'intervalles* Tous les intervalles considérés dans cet exercice seront inclus dans $[a, b]$. Soit \mathcal{U} l'ensemble des réunions finies d'intervalles inclus dans $[a, b]$.

1. Montrer que si $X \subset [a, b]$ est un ensemble fini, alors $X \in \mathcal{U}$.
2. Soit $X \subseteq [a, b]$. Montrer que la fonction indicatrice $\mathbb{1}_X$ de X est une fonction en escalier sur $[a, b]$ si et seulement si $X \in \mathcal{U}$.
3. Montrer que si A et B appartiennent à \mathcal{U} , alors $A \cup B \in \mathcal{U}$ et $A \cap B \in \mathcal{U}$. Montrer que si $A \in \mathcal{U}$, $[a, b] \setminus A \in \mathcal{U}$.
4. On définit l'application m de \mathcal{U} dans \mathbb{R} par $m(X) = \int_a^b \mathbb{1}_X(x)dx$.
 - (i) Montrer que si X est un intervalle, $m(X)$ est égal à la longueur de X .
 - (ii) Montrer que si $X \in \mathcal{U}$ et J est un ensemble fini, alors $m(X \cup J) = m(X)$.
 - (iii) Montrer que si $X \subseteq Y$ et $X, Y \in \mathcal{U}$, $m(X) \leq m(Y)$.
 - (iv) Montrer que si $X \subseteq Y$ et $X, Y \in \mathcal{U}$, $m(X \cup Y) = m(X) + m(Y) - m(X \cap Y)$.

5. Montrer que si $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite d'éléments de \mathcal{U} deux à deux disjoints, alors

$$\sum_{n=1}^{+\infty} m(X_n) < +\infty.$$

Proof.

1. Comme tout point est un intervalle de longueur zéro, le résultat est immédiat.
2. On remarque d'abord que tout élément $X \in \mathcal{U}$ est de la forme $X = \cup_{i=1}^n I_i$, où $I_i \subseteq [a, b]$ est un intervalle avec bornes $a_i \leq b_i$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, et $b_i < a_{i+1}$, pour tout $i \in \{1, \dots, n-1\}$. Soit $X \in \mathcal{U}$ comme ci-dessus. Alors $\mathbb{K}_X = \sum_{i=1}^n \mathbb{K}_{I_i}$ est une fonction en escalier pour la subdivision $a \leq a_1 \leq b_1 < \dots < a_n \leq b_n \leq b$. Réciproquement, soit $X \subseteq [a, b]$ tel que \mathbb{K}_X est un fonction en escalier pour la subdivision $a = c_0 < \dots < c_{n+1} = b$, alors, pour tout $i \in \{0, \dots, n\}$, $]c_i, c_{i+1}[\subseteq X$ ou $]c_i, c_{i+1}[\cap X = \emptyset$. Soient $I = \{i \in \{0, \dots, n\} :]c_i, c_{i+1}[\subseteq X\}$ et $J = \{i \in \{0, \dots, n\} : c_i \in X\}$. Alors X est la réunion des points dans J et des intervalles dans I .
3. Soient $A = \cup_{\ell \in L} I_\ell$ et $B = \cup_{\ell' \in L'} J_{\ell'}$, avec L et L' deux ensembles finis d'indices et $I_\ell, J_{\ell'} \subseteq [a, b]$ des intervalles pour tout $\ell \in L$ et $\ell' \in L'$. Alors $A \cup B = \cup_{\ell \in L} I_\ell \cup \cup_{\ell' \in L'} J_{\ell'} \in \mathcal{U}$. En outre, comme l'intersection de deux intervalles est un intervalle, $A \cap B = \cup_{\ell \in L} \cup_{\ell' \in L'} (I_\ell \cap J_{\ell'}) \in \mathcal{U}$. Finalement, c'est clair que si $I \subseteq [a, b]$ est un intervalle, alors $[a, b] \setminus I$ est la réunion de deux intervalles. Alors, $[a, b] \setminus A = \cup_{\ell \in L} ([a, b] \setminus I_\ell) \in \mathcal{U}$.
4. Tous les items sont immédiats.
5. On pose $Y_n = \sqcup_{i=1}^n X_n \in \mathcal{U}$. La réunion étant disjointe implique que

$$s_n = m(Y_n) = \sum_{i=1}^n m(X_n).$$

Comme $m(X_n) \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la suite $(s_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante. En outre, l'inclusion $Y_n \subseteq [a, b]$ nous dit que $s_n = m(Y_n) \leq b - a$, i.e. la suite $(s_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est bornée. Le théorème de Bolzano-Weierstrass nous dit alors que $(s_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente.

□

2.2 Quelques applications

Exercice 34 *Produit de Wallis*

1. Montrer que

$$\int \sin^n(x) dx = -\frac{1}{n} \sin^{n-1}(x) \cos(x) + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2}(x) dx,$$

pour tout entier $n \geq 2$.

2. À partir d'une récurrence et de l'item précédent, en déduire que

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n}(x) dx = \frac{2n-1}{2n} \frac{2n-3}{2n-2} \cdots \frac{1}{2} \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \prod_{i=1}^n \frac{2i-1}{2i}$$

et

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1}(x) dx = \frac{2n}{2n+1} \frac{2n-2}{2n-1} \cdots \frac{2}{3} = \prod_{i=1}^n \frac{2i}{2i+1},$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. Utiliser l'item précédent et le fait que les puissances de $\sin(x)$ sont décroissantes (pour $x \in [0, \pi/2]$) pour conclure que

$$\frac{1}{1 + 1/(2n)} \leq \frac{\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1}(x) dx}{\int_0^{\pi/2} \sin^{2n}(x) dx} \leq 1,$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

4. En déduire le *produit de Wallis*

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{i=1}^n \frac{(2i)^2}{(2i-1)(2i+1)}.$$

5. Montrer que

$$\sqrt{\pi} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n!)^2 2^{2n}}{(2n)! n^{1/2}}. \quad (6)$$

Indication : réécrire le produit de Wallis sous la forme

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{i=1}^n \frac{(2i)^2}{(2i-1)^2} \frac{1}{2n+1}$$

et prendre la racine carrée.

Proof. La solution suit directement des indications détaillées dans l'exercice. \square

Exercice 35 Formule de Stirling

1. Soient $\phi, \psi :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ définies par

$$\phi(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) - x \text{ et } \psi(x) = \phi(x) - \frac{x^3}{3(1-x^2)}.$$

Montrer que

$$\phi'(x) = \frac{x^2}{1-x^2} \text{ et } \psi'(x) = \frac{-2x^4}{3(1-x^2)^2}$$

pour tout $x \in]-1, 1[$. En déduire que $\phi(x) > 0$ et $\psi(x) < 0$, pour tout $x \in]0, 1[$.

2. En déduire que

$$0 \leq \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) - x \leq \frac{x^3}{3(1-x^2)},$$

pour tout $x \in [0, 1[$.

3. Soit $x_n = 1/(2n+1)$, pour $n \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$\frac{1+x_n}{1-x_n} = \frac{n+1}{n} \text{ et } \frac{x_n^3}{3(1-x_n^2)} = \frac{1}{12(2n+1)n(n+1)},$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

4. En déduire que

$$0 \leq \frac{1}{2} \ln \left(\frac{n+1}{n} \right) - \frac{1}{2n+1} \leq \frac{1}{12(2n+1)n(n+1)},$$

ou, de façon équivalente,

$$0 \leq \left(n + \frac{1}{2} \right) \ln \left(\frac{n+1}{n} \right) - 1 \leq \frac{1}{12} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right),$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

5. Soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ deux suites réelles données par

$$a_n = \frac{n^{n+1/2}e^{-n}}{n!} \text{ et } b_n = a_n e^{1/(12n)}.$$

Montrer que $a_n \leq b_n$, $a_n \leq a_{n+1}$ et $b_{n+1} \leq b_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. En déduire qu'il existe un unique nombre réel $c > 0$ tel que $a_n \leq c \leq b_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

6. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $\theta_n \in [0, 1]$ tel que

$$n! = c^{-1} n^{n+1/2} e^{-n} e^{\theta_n/(12n)}. \quad (7)$$

7. Utiliser (6) pour montrer que $c = 1/\sqrt{2\pi}$.

Indication : remplacer n par $2n$ dans (7) et prendre la limite quand n tend vers $+\infty$ pour obtenir

$$c = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(2n)^{2n+1/2} e^{-2n}}{(2n)!} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n!)^2 2^{2n} \sqrt{2}}{(2n)! \sqrt{n}} \left(\frac{n^{n+1/2} e^{-n}}{n!} \right)^2 = \sqrt{2\pi} c^2,$$

où l'on a utilisé (6) dans la dernière égalité.

Proof. La solution suit directement des indications détaillées dans l'exercice. \square

3 Intégration élémentaire (2ème partie)

Exercice 36 Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux.

1. Montrer que $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx$.
2. En déduire la valeur des intégrales suivantes :
 - (i) $\int_0^\pi \frac{x \sin(x)}{1 + \cos^2(x)} dx$,
 - (ii) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \tan(x)) dx$.

Proof.

1. Nous ne pouvons pas appliquer directement le théorème de changement de variable car la fonction f n'est pas supposé continue.

Si f est une fonction en escalier sur $[a, b]$, on montre que $\tilde{f}(x) = f(a+b-x)$ est aussi une fonction en escalier sur $[a, b]$ telle que $\int_a^b f = \int_a^b \tilde{f}$. Par densité des fonctions en escaliers, on montre que la propriété reste vrai sur les fonctions continue par morceaux.

2. L'égalité précédente nous dit que

$$\int_0^\pi \frac{x \sin(x)}{1 + \cos^2(x)} dx = \int_0^\pi \frac{(\pi - x) \sin(x)}{1 + \cos^2(x)} dx,$$

où l'on a utilisé que $\sin(\pi - x) = \sin(x)$ et $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$. En conséquence,

$$\int_0^\pi \frac{x \sin(x)}{1 + \cos^2(x)} dx = \frac{1}{2} \int_0^\pi \frac{\pi \sin(x)}{1 + \cos^2(x)} dx = -\frac{\pi}{2} \left[\arctan(\cos(x)) \right]_0^\pi = \frac{\pi^2}{4}.$$

De même,

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \tan(x)) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\frac{2}{1 + \tan(x)}\right) dx,$$

où l'on a utilisé que $\sin(\pi/4-x) = \sqrt{2}(\cos(x)-\sin(x))/2$ et $\cos(\pi/4-x) = \sqrt{2}(\cos(x)+\sin(x))/2$. En conséquence,

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \tan(x)) dx = \frac{\pi \ln(2)}{8}.$$

□

Exercice 37 Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ continue et soit $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ continue et décroissante. Pour $x \in [a, b]$, on note $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ et $H(x) = \int_a^x |f(t)|dt$. Soit $N \in \mathbb{N}^*$ et $x_j = a + j(b-a)/N$, pour tout $j \in \{0, \dots, N\}$. Soient

$$I_N = \sum_{j=0}^{N-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(t)g(x_j)dt \text{ et } I = \int_a^b f(t)g(t)dt.$$

1. Montrer que

$$|I_N - I| \leq \sum_{j=0}^{N-1} (g(x_j) - g(x_{j+1})) (H(x_{j+1}) - H(x_j)).$$

En déduire que I_N tend vers I quand N tend vers $+\infty$.

2. Montrer que

$$I_N = \sum_{j=0}^{N-1} g(x_j)(F(x_{j+1}) - F(x_j)) = g(b)F(b) + \sum_{j=0}^{N-1} (g(x_j) - g(x_{j+1}))F(x_{j+1}).$$

En déduire que

$$\left| \int_a^b f(t)g(t)dt \right| \leq g(a) \sup_{c \in [a,b]} \left| \int_a^c f(t)dt \right|.$$

3. On suppose maintenant que f est une fonction à valeurs réelles. Montrez qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$\int_a^b f(t)g(t)dt = g(a) \int_a^c f(t)dt.$$

Indication : se servir de la fonction $G(x) = \max(F(x), 0)$ pour majorer l'expression de I_N dans l'item précédent.

Proof.

1. On voit bien que

$$\begin{aligned} |I_N - I| &\leq \left| \sum_{j=0}^{N-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(t)(g(x_j) - g(t))dt \right| \leq \sum_{j=0}^{N-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} |f(t)(g(x_j) - g(t))| dt \\ &\leq \sum_{j=0}^{N-1} (g(x_j) - g(x_{j+1})) \int_{x_j}^{x_{j+1}} |f(t)| dt = \sum_{j=0}^{N-1} (g(x_j) - g(x_{j+1}))(H(x_{j+1}) - H(x_j)). \end{aligned}$$

Comme la fonction H est continue sur un intervalle fermé et borné, elle est uniformément continue. En particulier, étant donné $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $|x - y| < \delta$ implique $|H(x) - H(y)| < \epsilon/(g(a) - g(b))$. On fixe $\epsilon > 0$ et on prend $N_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $N_0 > 1/\delta$. Alors

$$\sum_{j=0}^{N-1} (g(x_j) - g(x_{j+1}))(H(x_{j+1}) - H(x_j)) < \frac{\epsilon}{g(a) - g(b)} \sum_{j=0}^{N-1} (g(x_j) - g(x_{j+1})) = \epsilon,$$

pour tout $N \geq N_0$. Cela implique que I_N converge vers I quand N tend vers $+\infty$.

2. L'égalité

$$I_N = \sum_{j=0}^{N-1} g(x_j)(F(x_{j+1}) - F(x_j))$$

suit directement de la définition de F . En outre,

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{N-1} g(x_j)(F(x_{j+1}) - F(x_j)) &= \sum_{j=0}^{N-1} g(x_j)F(x_{j+1}) - \sum_{j=0}^{N-1} g(x_j)F(x_j) \\ &= \sum_{j=0}^{N-1} g(x_j)F(x_{j+1}) + g(b)F(b) - \sum_{j=1}^N g(x_j)F(x_j) \\ &= \sum_{j=0}^{N-1} g(x_j)F(x_{j+1}) + g(b)F(b) - \sum_{j=0}^{N-1} g(x_{j+1})F(x_{j+1}) \\ &= g(b)F(b) + \sum_{j=0}^{N-1} (g(x_j) - g(x_{j+1}))F(x_{j+1}), \end{aligned}$$

où l'on a utilisé dans la troisième égalité que $F(a) = 0$ et on a changé l'indice j par $j + 1$ dans la dernière somme dans la quatrième égalité.

La deuxième égalité de cet item implique que, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} |I_N| &\leq g(b)|F(b)| + \sum_{j=0}^{N-1} (g(x_j) - g(x_{j+1}))|F(x_{j+1})| \\ &\leq \left(g(b) + \sum_{j=0}^{N-1} (g(x_j) - g(x_{j+1})) \right) \sup_{c \in [a, b]} \left| \int_a^c f(t) dt \right| = g(a) \sup_{c \in [a, b]} \left| \int_a^c f(t) dt \right|, \end{aligned}$$

où l'on a utilisé que $|F(x)| \leq \sup\{|F(c)| : c \in [a, b]\}$, pour tout $x \in [a, b]$. Si l'on prend la limite quand N tend vers $+\infty$ on trouve l'inégalité demandée.

3. D'abord on peut supposer sans perte de généralité que $I \neq 0$ (sinon $c = a$ marche), et même $I > 0$ (sinon, on peut changer f par $-f$). On suppose aussi $g(a) > 0$ (sinon $c = a$ marche). On définit la fonction continue $G(x) = \max(0, F(x))$, et on note que En outre,

$$\begin{aligned} I_N &= g(b)F(b) + \sum_{j=0}^{N-1} (g(x_j) - g(x_{j+1}))F(x_{j+1}) \\ &\leq g(b)G(b) + \sum_{j=0}^{N-1} (g(x_j) - g(x_{j+1}))G(x_{j+1}) \\ &\leq g(b) \sup_{c \in [a, b]} G(c) + \sum_{j=0}^{N-1} (g(x_j) - g(x_{j+1})) \sup_{c \in [a, b]} G(c) \\ &= \left(g(b) + \sum_{j=0}^{N-1} (g(x_j) - g(x_{j+1})) \right) \sup_{c \in [a, b]} G(c) = g(a) \sup_{c \in [a, b]} G(c), \end{aligned}$$

Le premier item nous dit alors que $I \leq g(a) \sup_{c \in [a, b]} G(c)$, ce qui implique qu'il existe

$c \in [a, b]$ tel que $I = g(a)G(c)$, d'après le théorème de la valeur intermédiaire, vu que $G(a) = 0$. Comme $I, g(a) > 0$, alors $G(c)$ est aussi positif et donc il coïncide avec $F(c)$.

□

Exercice 38 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et décroissante, tendant vers 0 en $+\infty$. Montrez que la suite de terme général $\int_n^{n^2} f(t)e^{it} dt$ admet une limite quand n tend vers $+\infty$.

Proof. Il s'agit d'une conséquence immédiate de l'exercice 2. □

Exercice 39 Irrationalité de π Dans cet exercice, on va montrer que π est irrationnel (on utilise la définition de π donnée dans l'exercice 3 de la fiche 0). On procède par l'absurde : on suppose alors $\pi = p/q$, avec $p, q \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit le polynôme

$$f_n(x) = \frac{x^n(p - qx)^n}{n!}.$$

1. Montrer que $f_n(0) = 0$ et que $f_n(\pi - x) = f_n(x)$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. En déduire que $f_n^{(k)}(\pi - x) = (-1)^k f_n^{(k)}(x)$, pour tous $n, k \in \mathbb{N}^*$.

2. Montrer que $f_n^{(k)}(0) \in \mathbb{Z}$, pour tous $n, k \in \mathbb{N}$. En déduire que $f_n^{(k)}(\pi) \in \mathbb{Z}$, pour tous $n, k \in \mathbb{N}$.

3. On pose

$$F_n(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k f_n^{(2k)}(x),$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $F_n(0), F_n(\pi) \in \mathbb{Z}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4. Montrer que $F_n(x) + F_n''(x) = f_n(x)$ et que

$$\frac{d}{dx} (F_n'(x) \sin(x) - F_n(x) \cos(x)) = f_n(x) \sin(x),$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire que

$$\int_0^\pi f_n(x) \sin(x) dx = F_n(\pi) + F_n(0) \in \mathbb{Z}.$$

5. Montrer que

$$0 < f_n(x) \sin(x) < \frac{p^n \pi^n}{n!},$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in]0, \pi[$. En déduire que

$$0 < \int_0^\pi f_n(x) \sin(x) dx < \frac{\pi(p\pi)^n}{n!},$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. Conclure.

Proof. La solution suit directement des indications détaillées dans l'exercice. \square

Exercice 40 Inégalité de Hölder Soient $p, q \in \mathbb{R}$ tels que $p, q > 1$ et $1/p + 1/q = 1$. Soient f et g deux fonctions continues de $[a, b]$ dans \mathbb{R} .

1. Montrer que, pour tout $u, v \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, $u^{1/p} v^{1/q} \leq u/p + v/q$.

2. En déduire que

$$\left| \int_a^b f(t)g(t)dt \right| \leq \left(\int_a^b |f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(t)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Proof.

1. L'identité est immédiate si $u = 0$ ou $v = 0$. On suppose alors $u, v > 0$. Sans perte de généralité on peut supposer que $u \geq v$. On pose $x = u/v$. L'identité $u^{1/p} v^{1/q} \leq u/p + v/q$ devient $x^{1/p} \leq 1/q + x/p$. Elle est vérifiée pour $x = 1$. En outre, la dérivée $x^{-1/q}/p$ du membre de gauche est clairement inférieure à la dérivée $1/p$ du membre de droite pour $x > 1$. Cela implique que $x^{1/p} \leq 1/q + x/p$, pour tout $x \geq 1$, ce qui montre l'inégalité demandée.

2. Pour $t \in [a, b]$, on prend

$$u(t) = \frac{|f(t)|^p}{\int_a^b |f(t)|^p dt} \text{ et } v(t) = \frac{|g(t)|^q}{\int_a^b |g(t)|^q dt}.$$

D'après l'inégalité dans l'item précédent, on voit que

$$u(t)^{1/p} v(t)^{1/q} \leq \frac{1}{p \int_a^b |f(t)|^p dt} + \frac{1}{q \int_a^b |g(t)|^q dt}.$$

Si l'on intègre sur $[a, b]$ les fonctions dans l'inégalité précédente on déduit que

$$\left| \int_a^b f(t)g(t)dt \right| \leq \left(\int_a^b |f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(t)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}}.$$

□

Exercice 41 Soit $f :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $x \mapsto (x - 1)/\ln(x)$.

1. Montrer que f se prolonge en une fonction continue sur $[0, 1]$.
2. Soit $\varphi :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\varphi(x) = \int_x^{x^2} dt/\ln(t)$. Montrer que φ se prolonge en une fonction continue sur $[0, 1]$.
Indication : pour la limite en 1, on pourra utiliser une primitive de $1/(t \ln(t))$.
3. Montrer que φ est dérivable sur $]0, 1[$. Est-elle dérivable en 0 et 1 ?
4. Calculer $\int_0^1 f(t)dt$.

Proof.

1. C'est clair que la limite de $f(x)$ quand $x > 0$ tend vers 0 est 0. En outre, la règle de Bernoulli-L'Hôpital nous dit que

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x - 1}{\ln(x)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{1/x} = 1.$$

2. C'est clair que la limite de $\varphi(x)$ quand $x > 0$ tend vers 0 est 0. Par ailleurs,

$$\begin{aligned} \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln(t)} &= \int_x^{x^2} \frac{(t-1)dt}{t \ln(t)} + \int_x^{x^2} \frac{dt}{t \ln(t)} = \int_x^{x^2} \frac{(t-1)dt}{t \ln(t)} + \left[\ln(|\ln(t)|) \right]_x^{x^2} \\ &= \int_x^{x^2} \frac{(t-1)dt}{t \ln(t)} + \ln\left(\left|\frac{\ln(x^2)}{\ln(x)}\right|\right) = \int_x^{x^2} \frac{(t-1)dt}{t \ln(t)} + \ln(2), \end{aligned} \quad (8)$$

pour tout $x \in]0, 1[$. En plus, d'après l'item précédent, la fonction $t \mapsto (t-1)/(t \ln(t))$ peut se prolonger par continuité en $t = 1$, ce qui nous dit que l'intégrale

$$G(x) = \int_x^1 \frac{(t-1)dt}{t \ln(t)}$$

converge et elle est une fonction continue sur $]0, 1]$. Cela implique que

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \varphi(x) = \ln(2).$$

3. Soit $F(t)$ une primitive de $1/\ln(t)$ définie sur $]0, 1[$. Alors $\varphi(x) = F(x^2) - F(x)$ sur $]0, 1[$ et en particulier

$$\varphi'(x) = 2xF'(x^2) - F'(x) = \frac{2x}{\ln(x^2)} - \frac{1}{\ln(x)} = \frac{x}{\ln(x)} - \frac{1}{\ln(x)} = \frac{x-1}{\ln(x)},$$

pour tout $x \in]0, 1[$. En outre, la règle de Bernoulli-L'Hôpital nous dit que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\varphi(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\varphi'(x)}{1} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x-1}{\ln(x)} = 0.$$

Le même argument nous dit que la dérivée de $\varphi(x)$ en $x = 1$ est

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x-1}{\ln(x)} = 1.$$

4. C'est clair que

$$\int_0^1 f(t)dt = \lim_{x \rightarrow 1^-} \varphi(x) = \ln(2).$$

□

Exercice 42 On définit $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ via $f(x) = e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} dt$.

1. Montrer que

$$f(x) \geq \frac{1}{2x} - \frac{e^{-x^2}}{2x},$$

pour tout $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.

2. En découpant l'intervalle $[0, x]$ en $[0, x - \sqrt{x}]$ et $[x - \sqrt{x}, x]$ pour $x > 1$, montrer que $f(x)$ est équivalent à $1/(2x)$ en $+\infty$.

Proof.

1. On remarque que

$$f(x) \geq \frac{1}{2x} - \frac{e^{-x^2}}{2x}$$

est équivalente à

$$2x \int_0^x e^{t^2} dt \geq e^{x^2} - 1,$$

pour tout $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Pour démontrer cette inégalité, on observe qu'elle est vérifiée si $x = 0$ et pour $x > 0$ la dérivée $2xe^{x^2} + 2 \int_0^x e^{t^2} dt$ du membre de gauche est clairement supérieure ou égale à la dérivée $2xe^{x^2}$ du membre de droite.

2. On voit bien que

$$0 \leq 2xe^{-x^2} \int_0^{x-\sqrt{x}} e^{t^2} dt \leq 2x(x - \sqrt{x})e^{-x^2} e^{(x-\sqrt{x})^2} = \frac{2x(x - \sqrt{x})}{e^{x(2\sqrt{x}-1)}}.$$

Comme le dernier membre de cette inégalité converge vers zéro quand x tend vers $+\infty$, l'intégrale $\leq 2xe^{-x^2} \int_0^{x-\sqrt{x}} e^{t^2} dt$.

En outre, une intégration par parties nous dit que

$$\begin{aligned} 2xe^{-x^2} \int_0^{x-\sqrt{x}} e^{t^2} dt &= 2xe^{-x^2} \left[\frac{e^{t^2}}{2t} \right]_{x-\sqrt{x}}^x + xe^{-x^2} \int_{x-\sqrt{x}}^x \frac{e^{t^2}}{t^2} dt \\ &= 1 - \frac{1}{e^{x(2\sqrt{x}-1)}(1 - 1/\sqrt{x})} + xe^{-x^2} \int_{x-\sqrt{x}}^x \frac{e^{t^2}}{t^2} dt. \end{aligned} \tag{9}$$

C'est clair que la limite du deuxième opérande dans le dernier membre de (13) est zéro quand x tend vers $+\infty$. Par ailleurs,

$$0 \leq xe^{-x^2} \int_{x-\sqrt{x}}^x \frac{e^{t^2}}{t^2} dt \leq xe^{-x^2} \frac{e^{x^2}}{(x - \sqrt{x})^2} \sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{x} - 2 + 1/\sqrt{x}}.$$

Comme le dernier membre de cette inégalité converge vers zéro quand x tend vers $+\infty$, la limite du dernier opérande dans le dernier membre de (13) est zéro quand x tend vers $+\infty$. Cela montre que (13) converge vers 1 quand x tend vers $+\infty$.

□

Exercice 43 Déterminer la limite des sommes suivantes quand n tend vers $+\infty$, en les interprétant comme des sommes de Riemann :

(a) $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{n+k}{n^2+k^2}$, (b) $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^2(n^3+k^3)^{1/3}}$, (c) $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} \sin(k\pi/(n+1))$,
(d) $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \cos^2(k\pi/n)$, (e) $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2n+3k}$, (f) $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n^2-k^2}}$,
(g) $S_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{\pi}{k}$. En déduire la valeur de la limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=n}^{2n} \sin(\pi/k).$$

Proof.

1. On voit bien que

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{n+k}{n^2+k^2} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \frac{1+k/n}{1+(k/n)^2}$$

coïncide avec une somme de Riemann de l'application $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = (1+x)/(1+x^2)$ associée à la subdivision $\{x_j = j/n : j \in \{0, \dots, n\}\}$ de l'intervalle $[0, 1]$. En conséquence,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \int_0^1 \frac{1+x}{1+x^2} dx = \left[\arctan(x) + \frac{\ln(1+x^2)}{2} \right]_0^1 = \frac{\pi + \ln(4)}{4}.$$

2. C'est clair que

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^2(n^3+k^3)^{1/3}} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \frac{(k/n)^2}{(1+(k/n)^3)^{1/3}}$$

coïncide avec une somme de Riemann de l'application $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = x^2/(1+x^3)^{1/3}$ associée à la subdivision $\{x_j = j/n : j \in \{0, \dots, n\}\}$ de l'intervalle $[0, 1]$. En conséquence,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt[3]{1+x^3}} dx = \left[\frac{1}{2}(1+x^3)^{2/3} \right]_0^1 = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} - \frac{1}{2}.$$

3. On voit bien que

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} \sin(k\pi/(n+1)) = \left(\frac{n+1}{n} \right)^2 \sum_{k=0}^n \frac{1}{n+1} \frac{k}{n+1} \sin(k\pi/(n+1))$$

est le produit de $(n+1)^2/n^2$ et une somme de Riemann de l'application $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = x \sin(\pi x)$ associée à la subdivision $\{x_j = j/(n+1) : j \in \{0, \dots, n+1\}\}$ de l'intervalle $[0, 1]$. En conséquence,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \int_0^1 x \sin(\pi x) dx = \left[\frac{\sin(\pi x)}{\pi^2} - \frac{x \cos(\pi x)}{\pi} \right]_0^1 = \frac{1}{\pi}.$$

4. C'est clair que

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \cos^2(k\pi/n)$$

coïncide avec une somme de Riemann de l'application $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = \cos^2(\pi x)$ associée à la subdivision $\{x_j = j/n : j \in \{0, \dots, n\}\}$ de l'intervalle $[0, 1]$. En conséquence,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \int_0^1 \cos^2(\pi x) dx = \left[\frac{x}{2} + \frac{\sin(2\pi x)}{4\pi} \right]_0^1 = \frac{1}{2}.$$

5. On voit bien que

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2n + 3k} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} \frac{1}{2 + 3k/n}$$

est une somme de Riemann de l'application $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = 1/(2 + 3x)$ associée à la subdivision $\{x_j = j/n : j \in \{0, \dots, n\}\}$ de l'intervalle $[0, 1]$. En conséquence,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \int_0^1 \frac{1}{2 + 3x} dx = \left[\frac{\ln(3x + 2)}{3} \right]_0^1 = \frac{\ln(5/2)}{3}.$$

6. C'est clair que

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n^2 - k^2}} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} \frac{1}{\sqrt{1 - (k/n)^2}}$$

est une somme de Riemann de l'application $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = 1/\sqrt{1 - x^2}$ associée à la subdivision $\{x_j = j/n : j \in \{0, \dots, n\}\}$ de l'intervalle $[0, 1]$. Hélas, la fonction n'étant pas bornée, elle n'est pas intégrable et le théorème des sommes de Riemann ne s'applique pas. On fixe $A \in [0, 1[$ et on coupe la somme en deux

$$S_n = \sum_{k=0, k \leq An} \frac{1}{n} \frac{1}{\sqrt{1 - (k/n)^2}} + \sum_{k \in]An, n-1]} \frac{1}{\sqrt{n^2 - k^2}}.$$

La première somme correspond à la somme de Riemann sur l'intervalle $[1, A]$ et converge donc quand $n \rightarrow +\infty$ vers $\int_0^A f = \arcsin A$. La seconde somme est majorée par le théorème de comparaison série intégrale

$$\sum_{k \in]An, n-1]} \frac{1}{\sqrt{n^2 - k^2}} \leq \frac{1}{n} \sum_{p \in [1, n-An]} \frac{1}{\sqrt{p}} \leq 1 + \int_1^{n-An} \frac{1}{\sqrt{t}} dt \leq 2\sqrt{1-A}.$$

En conséquence, pour tout $\epsilon > 0$ fixé, on choisit $A \in [0, 1[$ telle que $2\sqrt{1-A} \leq \epsilon/3$ et $|\arcsin A - \arcsin 1| \leq \epsilon/3$, puis on fixe N assez grand telle que la première somme soit proche de $\arcsin A$ à $\epsilon/3$ près. On a donc pour $n \geq N$, $|S_n - \arcsin 1| \leq \epsilon$, ce qui implique que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}.$$

7. On voit bien que

$$S_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{\pi}{k} = \sum_{k=0}^n \frac{\pi}{k+n} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{n} \frac{\pi}{1 + k/n} = \frac{\pi}{n} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \frac{\pi}{1 + k/n}$$

est la somme de π/n et une somme de Riemann de l'application $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = \pi/x$ associée à la subdivision $\{x_j = 1 + j/n : j \in \{0, \dots, n\}\}$ de l'intervalle $[1, 2]$. En conséquence,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \int_1^2 \frac{\pi}{x} dx = \pi \left[\ln(x) \right]_1^2 = \pi \ln(2).$$

Par ailleurs, comme $|\sin(x)| \leq |x|$, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

alors, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $-\epsilon x \leq \sin(x) - x \leq 0$, pour tout $x \in [-\delta, \delta]$. Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $n_0 > \pi/\delta$. Alors, si $n \geq n_0$,

$$-\epsilon \sum_{k=n}^{2n} \frac{\pi}{k} \leq \sum_{k=n}^{2n} \sin\left(\frac{\pi}{k}\right) - \sum_{k=n}^{2n} \frac{\pi}{k} \leq 0.$$

Si l'on prend la limite inférieure ou supérieure quand n tend vers $+\infty$, on trouve que

$$-\epsilon \pi \ln(2) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=n}^{2n} \sin\left(\frac{\pi}{k}\right) - \pi \ln(2) \leq 0,$$

et de même pour la limite supérieure. Comme les inégalités précédentes sont valables pour tout $\epsilon > 0$, on conclut que

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=n}^{2n} \sin\left(\frac{\pi}{k}\right) = \pi \ln(2)$$

et de même pour la limite supérieure. Cela implique que la limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=n}^{2n} \sin(\pi/k)$$

existe et vaut $\pi \ln(2)$.

□

Exercice 44 Soit

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \cos(ka/n),$$

avec $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

1. Évaluer directement $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.
2. Évaluer la même limite en utilisant que S_n est une somme de Riemann.

Proof.

1. On voit bien que

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \cos(ka/n) = \frac{1}{n} \operatorname{Re} \left(\sum_{k=0}^{n-1} e^{ika/n} \right) = \frac{1}{n} \operatorname{Re} \left(\frac{1 - e^{ia}}{1 - e^{ia/n}} \right) \\ &= \frac{1 - \cos(a) - \cos(a/n) + \cos(a(n-1)/n)}{2n(1 - \cos(a/n))} \\ &= \frac{n(1 - \cos(a) - \cos(a/n) + \cos(a(n-1)/n))}{a^2 (1 - \cos(a/n))/(a/\sqrt{2n})^2}. \end{aligned}$$

Comme la limite de $(1 - \cos(x))/(x^2/2)$ est 1 quand x tend vers zéro, on voit que la limite de S_n quand n tend vers $+\infty$ coïncide avec

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{a^2} (1 - \cos(a) - \cos(a/n) + \cos(a(n-1)/n)) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - \cos(a)}{\sqrt{2n}} \frac{1 - \cos(a/n)}{(a/\sqrt{2n})^2} + \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{a} \frac{\sin(a) \sin(a/n)}{a/n} = \frac{\sin(a)}{a}, \end{aligned}$$

où l'on a utilisé que $\cos(a(n-1)/n) = \cos(a) \cos(a/n) + \sin(a) \sin(a/n)$ et que la limite $\sin(x)/x$ est 1 quand x tend vers zéro.

2. C'est clair que S_n est une somme de Riemann de l'application $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = \cos(ax)$ associée à la subdivision $\{x_j = j/n : j \in \{0, \dots, n\}\}$ de l'intervalle $[0, 1]$. En conséquence,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \int_0^1 \cos(ax) dx = \left[\frac{\sin(ax)}{a} \right]_0^1 = \frac{\sin(a)}{a}.$$

□

Exercice 45 Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$U_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \text{ et } V_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k}.$$

1. Calculer la limite de $U_{2n} - U_n$ quand $n \rightarrow +\infty$ en utilisant une somme de Riemann.
2. Rappeler pourquoi $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n$ existe et calculer cette limite.

Proof.

1. On voit bien que $U_{2n} - U_n$ coïncide avec S_n/π dans le dernier item de l'exercice 3. En conséquence, sa limite existe quand n tend vers $+\infty$ et elle vaut $\ln(2)$.
2. Le critère de Leibniz nous dit que la limite de V_n existe quand n tend vers $+\infty$. En outre, on voit bien que $V_{2n} = U_n - U_{2n}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Cela implique que la limite de V_n quand n tend vers $+\infty$ est $\ln(2)$.

□

Exercice 46 Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$. On pose $f(x) = \int_0^{2\pi} \ln(x^2 - 2x \cos t + 1) dt$.

1. Déterminer le domaine $\text{Dom}(f)$ de f .
2. Factoriser le polynôme $X^n - 1$ dans $\mathbb{C}[X]$.
3. Calculer $f(x)$ à l'aide de ses sommes de Riemann.

Proof.

1. On remarque que

$$f(x) = \int_0^{2\pi} \ln(x^2 - 2x \cos t + 1) dt = \int_0^{2\pi} \ln(|x - e^{it}|^2) dt = 2 \int_0^{2\pi} \ln(|x - e^{it}|) dt.$$

En particulier le domaine $\text{Dom}(f)$ de f est $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$.

2. C'est clair que $X^n - 1 = \prod_{\zeta \in \mathbb{G}_n} (X - \zeta)$, où $\mathbb{G}_n \subseteq \mathbb{C}$ est l'ensemble formé des racines de l'unité d'ordre n .

3. Soit

$$S_n(x) = \frac{2\pi}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \ln(|x - e^{i2\pi k/n}|) = \frac{2\pi}{n} \ln \left(\prod_{k=0}^{n-1} |x - e^{i2\pi k/n}| \right) = 2\pi \ln(|x^n - 1|^{1/n}).$$

C'est clair que $S_n(x)$ est une somme de Riemman de l'intégral qui donne $f(x)/2$. Comme la limite simple de la suite $|x^n - 1|^{1/n}$ est $|x|$ si $|x| > 1$ et 1 si $|x| < 1$, on conclut que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x) = 2\pi \ln(|x|)$$

si $|x| > 1$ et cette limite vaut zéro si $|x| < 1$. En conséquence, $f(x) = 0$ si $|x| < 1$ et $f(x) = 4\pi \ln(|x|)$, si $|x| > 1$.

□

Exercice 47 Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{(k+n)(k+1+n)}}.$$

Déterminer la limite de u_n .

Proof. C'est clair que

$$\begin{aligned} \underbrace{\sum_{k=1}^n \frac{1}{n+1} \frac{1}{1+k/(n+1)}}_{L_n} &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{(k+n+1)^2}} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{(k+n)(k+1+n)}} \\ &\leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{(k+n)^2}} = \sum_{k=1}^n \underbrace{\frac{1}{n} \frac{1}{1+k/n}}_{R_n}. \end{aligned} \tag{10}$$

On dénote L_n et R_n les sommes indiquées ci-dessus. C'est clair que R_n est une somme de Riemann de l'application $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = 1/(1+x)$ associée à la subdivision $\{x_j = j/n : j \in \{0, \dots, n\}\}$ de l'intervalle $[0, 1]$. En conséquence,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = \left[\ln(1+x) \right]_0^1 = \ln(2).$$

Par ailleurs, soit

$$\bar{L}_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{n+1} \frac{1}{1+k/(n+1)} = \frac{1}{n+1} + L_n.$$

On voit bien que \bar{L}_n est une somme de Riemann de l'application $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = 1/(1+x)$ associée à la subdivision $\{x_j = j/(n+1) : j \in \{0, \dots, n\}\}$ de l'intervalle $[0, 1]$ et en particulier

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \bar{L}_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = \ln(2).$$

Cela implique que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} L_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \bar{L}_n - \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \bar{L}_n = \ln(2).$$

L'inégalité (10) dit que la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$ est $\ln(2)$. □

Exercice 48 Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 telle que $f(0) = 0$.

1. Montrer que

$$\int_0^1 f^2(x)dx \leq \frac{1}{2} \int_0^1 f'^2(x)dx.$$

Indication : écrire $f(x) = \int_0^x f'(s)ds$, pour $x \in [0, 1]$, et utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwartz.

2. Améliorer l'inégalité précédente quand de plus $f(1) = 0$.

Proof.

1. On écrit

$$|f(x)| = \left| \int_0^x f'(s)ds \right| \leq \|1\|_2 \cdot \|f'\|_2 = \sqrt{x} \sqrt{\int_0^x |f'(s)|^2 ds},$$

où l'on a utilisé l'inégalité de Cauchy-Schwarz. En conséquence.

$$\int_0^1 |f(x)|^2 dx \leq \int_0^1 x \int_0^x |f'(s)|^2 ds dx \leq \int_0^1 x dx \int_0^1 |f'(s)|^2 ds = \frac{1}{2} \int_0^1 |f'(s)|^2 ds.$$

2. La première inégalité de l'item précédent nous dit que

$$\int_0^{1/2} |f(x)|^2 dx \leq \int_0^{1/2} x \int_0^x |f'(s)|^2 ds dx \leq \int_0^{1/2} x dx \int_0^{1/2} |f'(s)|^2 ds = \frac{1}{8} \int_0^{1/2} |f'(s)|^2 ds.$$

Cette inégalité est aussi valable pour la fonction $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = f(1-x)$, puisque $g(0) = f(1) = 0$. En conséquence,

$$\int_0^{1/2} |g(y)|^2 dy \leq \frac{1}{8} \int_0^{1/2} |g'(y)|^2 dy.$$

En outre, la substitution $y = 1-x$ nous dit que

$$\int_0^{1/2} |g(y)|^2 dy = \int_{1/2}^1 |f(x)|^2 dx \text{ et } \int_0^{1/2} |g'(y)|^2 dy = \int_{1/2}^1 |f'(x)|^2 dx.$$

En conséquence,

$$\int_0^1 |f(x)|^2 dx \leq \frac{1}{8} \int_0^1 |f'(x)|^2 dx.$$

□

4 Intégrales impropres

Si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue par morceaux sur un intervalle I , on dira que f est intégrable sur I si l'intégrale généralisée $\int_I |f(x)| dx$ est convergente, *i.e.* si $\int_I f(x) dx$ est absolument convergente.

Exercice 49 Soit $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux telle que $\int_a^b |f(x)| dx$ converge. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite croissante d'éléments de $[a, b[$ convergent vers b .

1. Montrer que la suite $I_n = \int_a^{x_n} f(x) dx$ est de Cauchy.
2. Montrer que cette limite ne dépend pas de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ choisie. En déduire que l'intégrale $\int_a^b f(x) dx$ est convergente.

Proof. Il s'agit des résultats du cours. \square

Exercice 50 Déterminer la nature des intégrales généralisées suivantes :

- (a) $\int_0^1 \ln(x) dx$, (b) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, (c) $\int_0^1 \frac{dx}{e^x - 1}$, (d) $\int_1^{+\infty} \frac{e^{1/x}}{x^2} dx$, (e) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx$,
 (f) $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx$, (g) $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos(x) - 1}{\sin^2(x)} dx$, (h) $\int_0^1 \frac{1-x^2}{1-\sqrt{x}} dx$.

Proof.

1. On voit bien que

$$\int_0^1 \ln(x) dx = \left[x \ln(x) - x \right]_0^1 = -1.$$

2. C'est clair que

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \left[\arcsin(x) \right]_0^1 = \frac{\pi}{2}.$$

3. Comme

$$\int_0^1 \frac{dx}{e^x - 1} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\ln(|1 - e^x|) - x \right]_{\epsilon}^1$$

et la dernière limite diverge, l'intégrale est divergente.

4. On voit bien que

$$\int_1^{+\infty} \frac{e^{1/x}}{x^2} dx = \lim_{M \rightarrow +\infty} \left[-e^{1/x} \right]_1^M = e - 1.$$

5. C'est clair que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin(x)}{x} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin(x)|}{x} dx.$$

Soit $a_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin(x)|/x dx \geq 0$, pour $n \in \mathbb{N}$. On voit bien que

$$a_n = \int_0^{\pi} \frac{|\sin(x)|}{n\pi + x} dx,$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. Cela implique que

$$a_{n+1} = \int_0^\pi \frac{|\sin(x)|}{n\pi + x + \pi} dx \leq \int_0^\pi \frac{|\sin(x)|}{n\pi + x} dx = a_n.$$

Le critère de Leibniz nous dit alors que $\int_0^{+\infty} \sin(x)/x dx = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n$ converge.

6. C'est clair que $\ln(1+x)/x$ est une fonction continue sur $]0, 1]$. En outre, la règle de Bernoulli-L'Hôpital dit que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1/(1+x)}{1} = 1,$$

ce qui implique que $\ln(1+x)/x$ se prolonge en une fonction continue sur $[0, 1]$. En conséquence, l'intégrale $\int_0^1 \ln(1+x)/x dx$ converge.

7. On voit bien que $(\cos(x) - 1)/\sin^2(x)$ est une fonction continue sur $]0, \pi/2]$. Par ailleurs, d'après la règle de Bernoulli-L'Hôpital on voit que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{\sin^2(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin(x)}{2\sin(x)\cos(x)} = -\frac{1}{2},$$

ce qui implique que $(\cos(x) - 1)/\sin^2(x)$ se prolonge en une fonction continue sur $[0, \pi/2]$. En conséquence, l'intégrale $\int_0^1 (\cos(x) - 1)/\sin^2(x) dx$ converge.

8. On voit bien que

$$\int_0^1 \frac{1-x^2}{1-\sqrt{x}} dx = \int_0^1 (1+x)(1+\sqrt{x}) dx = \left[\frac{2x^{5/2}}{5} + \frac{2x^{3/2}}{3} + \frac{x^2}{2} + x \right]_0^1 = \frac{77}{30}.$$

□

Exercice 51

1. Déterminer la nature des intégrales généralisées :

(i) $\int_0^{+\infty} (x+2 - \sqrt{x^2+4x+1}) dx$, (ii) $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x+e^{-x}} dx$, (iii) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\cos(1/x)}} dx$,

(i) $\int_1^{+\infty} e^{-\sqrt{x^2-x}} dx$, (ii) $\int_2^{+\infty} \frac{1}{(\ln(x))^{\ln(x)}} dx$, (iii) $\int_3^{+\infty} \frac{dx}{(\ln(\ln(x)))^{\ln(x)}}$,

(i) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+|\sin(x)|}$.

7. Calculer, en montrant la convergence :

(i) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)(x+2)(x+3)}$, (ii) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^3+1}$, (iii) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)^2(x+2)^2}$,

(i) $\int_0^1 \frac{x \ln(x)}{(1-x^2)^{3/2}} dx$, (ii) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^a)}$ ($a \in \mathbb{R}$), (iii) $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} dx$ ($n \in \mathbb{N}^*$).

Proof.

1. (i) On voit bien que

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} (x+2 - \sqrt{x^2+4x+1}) dx &= \int_0^{+\infty} \frac{3}{x+2 + \sqrt{x^2+4x+1}} dx \\ &\geq \frac{3}{2} \int_0^{+\infty} \frac{1}{x+2} dx = \frac{3}{2} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{M \rightarrow +\infty} \left[\ln(x+2) \right]_\epsilon^M, \end{aligned}$$

où l'on a utilisé que $\sqrt{x^2 + 4x + 1} \leq \sqrt{x^2 + 4x + 4} = x + 2$, pour tout $x \geq 0$. Comme la dernière limite diverge (vers $+\infty$), on voit bien que l'intégrale demandée est divergente.

(ii) On voit bien que

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x + e^{-x}} dx \geq \int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{2x} dx = \frac{1}{4} \lim_{M \rightarrow +\infty} \left[\ln(x)^2 \right]_1^M,$$

où l'on a utilisé que $e^{-x} \leq x$, pour tout $x \geq 1$. Comme la dernière limite diverge (vers $+\infty$), on voit bien que l'intégrale demandée est divergente.

(iii) On voit bien que

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\cos(1/x)}} dx \geq \int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{M \rightarrow +\infty} \left[\ln(x) \right]_1^M,$$

où l'on a utilisé que $\cos(1/x) \leq 1$, pour tout $x \geq 1$, ce qui implique que $x^{\cos(1/x)} \leq x$, pour tout $x \geq 1$. Comme la dernière limite diverge (vers $+\infty$), on voit bien que l'intégrale demandée est divergente.

(iv) On voit bien que

$$\int_1^{+\infty} e^{-\sqrt{x^2-x}} dx = \int_1^2 e^{-\sqrt{x^2-x}} dx + \int_2^{+\infty} e^{-\sqrt{x^2-x}} dx.$$

Comme la première intégrale du membre de droite existe, vu que $e^{-\sqrt{x^2-x}}$ est une fonction continue définie sur un intervalle fermé et borné, l'intégrale demandée converge si et seulement si la deuxième intégrale du membre de droite converge. Comme $e^{-\sqrt{x^2-x}}$ est une fonction positive, il suffit de démontrer que l'intégrale est bornée. Dans ce cas

$$\int_2^{+\infty} e^{-\sqrt{x^2-x}} dx \leq \int_2^{+\infty} e^{-x/\sqrt{2}} dx = \lim_{M \rightarrow +\infty} \left[-\sqrt{2} e^{-x/\sqrt{2}} \right]_2^M,$$

où l'on a utilisé que $x^2 - x \geq x^2/2$, pour tout $x \geq 2$. Comme la dernière limite converge (vers 0 quand M tend vers $+\infty$), on voit bien que l'intégrale demandée est convergente.

(v) Comme $1/(\ln(x))^{\ln(x)} \geq 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}_{\geq 2}$, l'intégrale demandée est convergente si et seulement si elle est bornée. On voit bien que

$$\begin{aligned} \int_2^{+\infty} \frac{1}{(\ln(x))^{\ln(x)}} dx &= \int_{\ln(2)}^{+\infty} \frac{e^y}{y^y} dy = \int_{\ln(2)}^e \frac{e^y}{y^y} dy + \int_e^{+\infty} \frac{e^y}{y^y} dy \\ &\leq \int_{\ln(2)}^e \frac{e^y}{y^y} dy + e^2 \int_e^{+\infty} \frac{1}{y^2} dy = \int_{\ln(2)}^e \frac{e^y}{y^y} dy - e^2 \lim_{M \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{y} \right]_e^M, \end{aligned}$$

où l'on a utilisé la substitution $y = \ln(x)$ et que $(y/e)^y \geq (y/e)^2$, pour tout $y \geq e$. Comme l'avant-dernière intégrale converge puisque e^y/y^y est une fonction continue définie sur un intervalle fermé et borné, et la dernière limite converge (quand M tend vers $+\infty$), on voit bien que l'intégrale demandée est convergente.

(vi) On affirme que l'intégrale est convergente. Comme $1/(\ln(\ln(x)))^{\ln(x)} \geq 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}_{\geq 3}$, l'intégrale demandée est convergente si et seulement si elle est

bornée. Or, on voit bien que

$$\begin{aligned} \int_3^{+\infty} \frac{dx}{(\ln(\ln(x)))^{\ln(x)}} dx &= \int_{\ln(\ln(3))}^{+\infty} \frac{e^{e^y} e^y}{y^{e^y}} dy = \int_{\ln(\ln(3))}^{e^2} \frac{e^{e^y} e^y}{y^{e^y}} dy + \int_{e^2}^{+\infty} \frac{e^{e^y} e^y}{y^{e^y}} dy \\ &\leq \int_{\ln(\ln(3))}^{e^2} \frac{e^{e^y} e^y}{y^{e^y}} dy + \int_{e^2}^{+\infty} \frac{e^y}{(y/e)^y} dy \end{aligned}$$

où l'on a utilisé la substitution $y = \ln(\ln(x))$, $e^y \geq y$ et donc $(y/e)^{e^y} \geq (y/e)^y$, pour tout $y \geq e$. L'avant-dernière intégrale converge puisque $e^{e^y} e^y / y^{e^y}$ est une fonction continue définie sur un intervalle fermé et borné. Cela implique qu'il suffit de démontrer que la dernière intégrale est bornée. C'est clair que

$$\int_{e^2}^{+\infty} \frac{1}{(y/e^2)^y} dy \leq \int_{e^2}^{+\infty} \frac{1}{(y/e^2)^2} dy,$$

où l'on a utilisé que $(y/e^2)^y \geq (y/e)^2$, pour tout $y \geq e^2 \geq 2$. Comme la dernière intégrale converge, l'intégrale demandée aussi.

(vii) On voit bien que

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1 + |\sin(x)|} dx \geq \int_1^{+\infty} \frac{1}{2} dx = \lim_{M \rightarrow +\infty} \left[\frac{x}{2} \right]_0^M,$$

où l'on a utilisé que $1 + |\sin(x)| \leq 2$, pour tout $x \in \mathbb{R}$. Comme la dernière limite diverge (vers $+\infty$), on voit bien que l'intégrale demandée est divergente.

2. (i) On voit bien que

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)(x+2)(x+3)} &= \lim_{M \rightarrow +\infty} \left[\frac{\ln(x^2 + 4x + 3)}{2} - \ln(x+2) \right]_0^M \\ &= \ln(2) - \frac{\ln(3)}{2}. \end{aligned}$$

(ii) On voit bien que

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^3 + 1} &= \lim_{M \rightarrow +\infty} \left[-\frac{\ln(x^2 - x + 1)}{6} + \frac{\ln(x+1)}{3} + \frac{\arctan((2x-1)/\sqrt{3})}{\sqrt{3}} \right]_0^M \\ &= \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

(iii) Une intégration par parties nous dit que

$$\int \frac{x \ln(x)}{(1-x^2)^{3/2}} dx = \frac{\ln(x)}{(1-x^2)^{1/2}} - \int \frac{1}{x(1-x^2)^{1/2}} dx.$$

En outre, la substitution $y = \sqrt{1-x^2}$ dans la dernière intégrale nous donne

$$\begin{aligned} - \int \frac{1}{x(1-x^2)^{1/2}} dx &= \int \frac{1}{1-y^2} dy = \frac{1}{2} \ln \left(\left| \frac{1+y}{1-y} \right| \right) + C \\ &= \frac{1}{2} \ln \left(\left| \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{1-\sqrt{1-x^2}} \right| \right) + C. \end{aligned}$$

En conséquence,

$$\int \frac{x \ln(x)}{(1-x^2)^{3/2}} dx = \frac{\ln(x)}{(1-x^2)^{1/2}} + \ln \left(\left| \frac{1 + \sqrt{1-x^2}}{1 - \sqrt{1-x^2}} \right| \right) + C.$$

Un calcul long des limites nous dit que

$$\int_0^1 \frac{x \ln(x)}{(1-x^2)^{3/2}} dx = -\ln(2).$$

(iv) C'est clair que

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^a)} \leq \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2},$$

puisque $1+x^a \geq 1$ pour tout $x \geq 0$, ce qui implique que l'intégrale I est convergente. On fait la substitution $x = \tan(y)$, ce qui donne

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^a)} = \int_0^{\pi/2} \frac{dy}{1+\tan^a(y)}.$$

En outre, comme $\tan(\pi/2 - y) = 1/\tan(y)$, pour tout $y \in]0, \pi/2[$, on voit que

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \frac{dy}{1+\tan^a(y)} &= \int_0^{\pi/2} \left(1 - \frac{\tan^a(y)}{1+\tan^a(y)} \right) dy \\ &= \int_0^{\pi/2} \left(1 - \frac{1}{1+1/\tan^a(y)} \right) dy = \frac{\pi}{2} - \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\tan^a(\pi/2-y)} dy \\ &= \frac{\pi}{2} - \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\tan^a(z)} dz, \end{aligned}$$

où on a fait la substitution $z = \pi/2 - y$ dans la dernière intégrale. Cela implique que $I = \pi/2 - I$ et en conséquence $I = \pi/4$.

(v) C'est facile à vérifier que

$$\int \frac{\ln(x)}{x^n} dx = \frac{1 + (n-1) \ln(x)}{x^{n-1}(n-1)^2} + C$$

si $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ (à partir d'une intégration par parties avec $u = \ln(x)$ et $v' = 1/x^n$), et que

$$\int \frac{\ln(x)}{x} dx = \frac{\ln(x)^2}{2} + C.$$

Cela implique que

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x} dx$$

diverge et que

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} dx = \frac{1}{(n-1)^2},$$

si $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$.

□

Exercice 52 Montrer que l'intégrale généralisée

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)dt}{1+t^2}$$

converge. Grâce à un changement de variables simple montrer qu'elle est nulle. En déduire que pour tout $a > 0$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)dt}{a^2+t^2} = \frac{\pi \ln(a)}{2a}.$$

Proof. On voit que

$$\int_0^1 \frac{|\ln(t)|dt}{1+t^2} \leq \int_0^1 |\ln(t)|dt = -\int_0^1 \ln(t)dt = -\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[t(\ln(t) - 1) \right]_{\epsilon}^1 = 1.$$

En outre, comme la limite de $|\ln(t)|/\sqrt{t}$ quand t tend vers $+\infty$ est zéro, il existe $C > 1$ tel que $|\ln(t)| < \sqrt{t}$, pour tout $t > C$. Cela implique que

$$\int_C^{+\infty} \frac{|\ln(t)|dt}{1+t^2} \leq \int_C^{+\infty} \frac{\sqrt{t}dt}{t^2} = \int_C^{+\infty} \frac{dt}{t^{3/2}},$$

où l'on a utilisé que $1+t^2 \geq t^2$. Comme la dernière intégrale converge, on voit que $\int_C^{+\infty} |\ln(t)|dt/(1+t^2)$ converge aussi. Finalement, comme $t \mapsto |\ln(t)|dt/(1+t^2)$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}_{>0}$, l'intégrale $\int_1^C |\ln(t)|dt/(1+t^2)$ converge. Cela implique que $\int_0^{+\infty} |\ln(t)|dt/(1+t^2)$ converge.

Par ailleurs, si l'on fait la substitution $x = 1/t$, on trouve que

$$\int_0^1 \frac{\ln(t)dt}{1+t^2} = \int_1^{+\infty} \frac{\ln(1/x)dx}{1+x^2} = -\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)dx}{1+x^2}$$

ce qui implique que $\int_0^{+\infty} \ln(t)dt/(1+t^2) = 0$.

Finalement,

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)dt}{a^2+t^2} &= \frac{1}{a^2} \int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)dt}{1+(t/a)^2} = \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} \frac{\ln(ax)dx}{1+x^2} \\ &= \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} \frac{(\ln(a) + \ln(x))dx}{1+x^2} = \frac{\ln(a)}{a} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi \ln(a)}{2a}, \end{aligned}$$

où l'on a fait la substitution $x = t/a$. □

Exercice 53 Pour quelles valeurs de $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha + x^\beta}$$

est-elle convergente ?

Proof. On écrira $I(\gamma) = \int_0^1 x^{-\gamma} dx$ et $J(\gamma) = \int_1^{+\infty} x^{-\gamma} dx$, pour $\gamma \in \mathbb{R}$. On remarque que $I(\gamma)$ (resp., $J(\gamma)$) converge si et seulement si $\gamma < 1$ (resp., si $\gamma > 1$). On définit

$$\mathcal{I}(\alpha, \beta) = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha + x^\beta} = \underbrace{\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha + x^\beta}}_{I(\alpha, \beta)} + \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha + x^\beta}}_{J(\alpha, \beta)}.$$

On affirme que $\mathcal{I}(\alpha, \beta)$ converge si et seulement si $\alpha > 1$ et $\beta < 1$, ou $\alpha < 1$ et $\beta > 1$.

Désormais, on suppose sans perte de généralité que $\alpha \geq \beta$. C'est clair que $1/(x^\alpha + x^\beta) \leq 1/x^\alpha$ et $1/(x^\alpha + x^\beta) \leq 1/x^\beta$, pour tout $x > 0$, ce qui implique que $I(\alpha, \beta) \leq I(\beta)$ et $J(\alpha, \beta) \leq J(\alpha)$. Alors, si $\alpha > 1$ et $\beta < 1$, comme $\mathcal{I}(\alpha, \beta) \leq I(\beta) + J(\alpha)$, on voit que $\mathcal{I}(\alpha, \beta)$ converge.

Soit $\beta \geq 1$. Comme $1/(x^\alpha + x^\beta) \geq 1/(2x^\beta)$, pour tout $x \leq 1$, on conclut que $\mathcal{I}(\alpha, \beta) \geq I(\alpha, \beta) \geq I(\beta)/2$ diverge, puisque $I(\beta)$ diverge (vers $+\infty$). De même, si $\alpha \leq 1$, on note que $1/(x^\alpha + x^\beta) \geq 1/(2x^\alpha)$, pour tout $x \geq 1$, ce qui implique que $\mathcal{I}(\alpha, \beta) \geq J(\alpha, \beta) \geq J(\alpha)/2$ diverge, puisque $J(\alpha)$ diverge (vers $+\infty$). \square

Exercice 54 Soit $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux et intégrable. Montrer que la série de terme général $\int_n^{n+1} f(x) dx$ converge et que sa somme est $\int_0^{+\infty} f(x) dx$.

Proof. C'est immédiat de la définition. \square

Exercice 55 Soit $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux et intégrable. Montrer que

$$\lim_{x \rightarrow b} \int_x^b f(t) dt = 0.$$

Proof. C'est immédiat de la définition. \square

Exercice 56 Soient a et b des réels tels que $a < b$. Montrer que la fonction définie sur $]a, b[$ par

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$$

est intégrable sur $]a, b[$ et calculer son intégrale.

Indication : on fera le changement de variable $t = (x-a)/(b-x)$.

Proof. La substitution indiquée nous donne

$$\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t(1+t)}} = \lim_{M \rightarrow +\infty} \left[2 \arctan(\sqrt{t}) \right]_0^M = \pi.$$

\square

Exercice 57 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux et intégrable. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ et tout $b \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto f(ax+b)$ est intégrable sur \mathbb{R} et que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = |a| \int_{-\infty}^{+\infty} f(at+b) dt.$$

Proof. On suppose d'abord que $a > 0$. Soient $A, B > 0$. On voit bien que

$$\int_{-A}^B f(at + b)dt = \frac{1}{a} \int_{-aA+b}^{aB+b} f(x)dx.$$

où l'on a fait la substitution $x = at + b$. Alors,

$$\begin{aligned} a \int_{-\infty}^{+\infty} f(at + b)dt &= \lim_{A, B \rightarrow +\infty} a \int_{-A}^B f(at + b)dt = \lim_{A, B \rightarrow +\infty} \int_{-aA+b}^{aB+b} f(x)dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx, \end{aligned}$$

comme on voulait démontrer.

Si $a < 0$, on regarde $x \mapsto ax + b$ comme la composition des applications $x \mapsto -ax - b$ et $y \mapsto -y$. Il suffit donc de démontrer que la fonction $x \mapsto f(-x)$ est intégrable sur \mathbb{R} et que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(-t)dt.$$

Cela suit du fait que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \lim_{A, B \rightarrow +\infty} \int_{-A}^B f(t)dt = \lim_{A, B \rightarrow +\infty} \int_{-B}^A f(-x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx,$$

où l'on a fait la substitution $x = -t$. \square

Exercice 58 *Théorème de convergence monotone* Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suites de fonctions de I dans \mathbb{R} telle que

- (i) f_n est intégrable sur I ,
- (ii) $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante (*i.e.*, pour tout $x \in I$, $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante),
- (iii) $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers f .

Montrer que f est intégrable sur I si et seulement si $(\int_I f_n(x)dx)_{n \in \mathbb{N}}$ converge. De plus, montrer que dans ce cas on a les égalités suivantes

$$\int_I f(x)dx = \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_I f_n(x)dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_I f_n(x)dx.$$

Proof. Il s'agit d'un résultat du cours. \square

Exercice 59 *Théorème de convergence dominée* Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues par morceaux de I dans \mathbb{R} telle que

- (i) f_n est intégrable sur I ,
- (ii) il existe $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ intégrable sur I telle que $|f_n(x)| \leq \varphi(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in I$,
- (iii) $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers f .

Montrer que f est intégrable sur I et que

$$\int_I f(x)dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_I f_n(x)dx.$$

Proof. Il s'agit d'un résultat du cours. \square

Exercice 60 Montrer que

$$\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1} dt$$

converge et vaut $\sum_{n=1}^{+\infty} 1/n^2$.

Proof. Comme la limite de $t/(e^t - 1)$ en 0 est 1, la fonction $f(t) = t/(e^t - 1)$ définie sur $\mathbb{R}_{>0}$ se prolonge en une fonction continue $\bar{f} : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$. En outre, comme

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{f(t)}{t^{-2}} = 0$$

et l'intégrale $\int_1^{+\infty} t^{-2} dt$ converge, on conclut que $t/(e^t - 1)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_{\geq 0}$.

En outre, on réécrit

$$\frac{t}{e^t - 1} = \frac{e^{-t}t}{1 - e^{-t}} = \sum_{\ell \in \mathbb{N}_0} te^{-(\ell+1)t},$$

pour tout $t > 0$. En fait, comme les séries partielles du dernier membre sont majorées par la fonction intégrable et positive $\bar{f}(t)$ (sur $\mathbb{R}_{\geq 0}$), le théorème de convergence majorée dit que l'intégrale de $t/(e^t - 1)$ sur $\mathbb{R}_{>0}$ coïncide avec la série convergente

$$\sum_{\ell \in \mathbb{N}_0} \int_0^{+\infty} te^{-(\ell+1)t} dt.$$

En plus, une intégration par parties nous dit que la primitive de te^{-ct} (avec $c > 0$) est donnée par

$$-\frac{(1 + ct)e^{-ct}}{c^2}.$$

En conséquence, un calcul immédiat nous dit que le ℓ -ième opérande de la série précédente est $1/(\ell + 1)^2$. \square

Exercice 61

1. Montrer que l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{\ln(1 + xt^2)}{t^2} dt \tag{11}$$

converge pour tout $x \in \mathbb{R}_{>-1}$.

2. On définit la fonction $F : \mathbb{R}_{>-1} \rightarrow \mathbb{R}$ par (11). La fonction F est-elle continue en 0 ?

Proof.

1. Si $x \geq 0$, $0 \leq \ln(1 + xt^2) \leq xt^2$, pour tout $t \in [0, 1]$. Cela implique que

$$\int_0^1 \frac{\ln(1 + xt^2)}{t^2} dt \leq \int_0^1 x dt = x. \tag{12}$$

Si $-1 < x < 0$, on utilise que $|\ln(1 + xt^2)| \leq |x|t^2/(1 + xt^2)$, pour tout $t \in [0, 1]$, et, en conséquence,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\ln(1 + xt^2)}{t^2} dt &\leq \int_0^1 \frac{|x|}{1 - |x|t^2} dt = \frac{\sqrt{|x|}}{2} \left[\ln \left(\frac{1 + \sqrt{|x|}t}{1 - \sqrt{|x|}t} \right) \right]_0^1 \\ &= \frac{\sqrt{|x|}}{2} \ln \left(\frac{1 + \sqrt{|x|}}{1 - \sqrt{|x|}} \right). \end{aligned} \tag{13}$$

Cela implique que (11) converge absolument pour tout $x \in \mathbb{R}_{>-1}$.

2. On note d'abord que $F(0) = 0$. En outre, (12) nous dit que, si $x > 0$, $0 \leq F(x) \leq x$, ce qui implique que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = 0 = F(0).$$

Par ailleurs, d'après (13), on voit que

$$|F(x)| \leq \frac{\sqrt{|x|}}{2} \ln \left(\left| \frac{1 + \sqrt{|x|}}{1 - \sqrt{|x|}} \right| \right),$$

si $-1 < x < 0$. En conséquence,

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} F(x) = 0 = F(0).$$

On conclut que F est continue en 0.

□

Exercice 62 Trouver une suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in C^0([0, 1], \mathbb{R}_{\geq 0})^{\mathbb{N}}$ qui converge simplement vers la fonction nulle sans que la suite $(\int_0^1 f_n(x) dx)_{n \in \mathbb{N}}$ soit majorée.

Proof. Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = \begin{cases} 2^{3(n+1)}x, & \text{si } x \in [0, 1/2^{n+1}], \\ -2^{3(n+1)}(x - 1/2^n), & \text{si } x \in [1/2^{n+1}, 1/2^n], \\ 0, & \text{si } x \in [1/2^n, 1]. \end{cases}$$

C'est clair que f_n est continue et $\int_0^1 f_n(x) dx = 2^{n+1}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction nulle. □

Exercice 63 Trouver une série de fonctions continues, intégrables et d'intégrales nulles sur $\mathbb{R}_{\geq 0}$, convergeant simplement vers la fonction sinus sur $\mathbb{R}_{\geq 0}$.

Proof. Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $f_n : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = \begin{cases} \sin(x), & \text{si } x \in [0, 2n\pi], \\ 0, & \text{si } x \in \mathbb{R}_{\geq 2n\pi}. \end{cases}$$

C'est clair que f_n est continue, intégrable et $\int_0^{+\infty} f_n(x) dx = 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction sinus sur $\mathbb{R}_{\geq 0}$. □

Exercice 64 Montrer que la fonction $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nx} \frac{\sin(nx)}{x^2 + n^2}$$

est continue et intégrable (sur $\mathbb{R}_{\geq 0}$).

Proof. Pour $m \in \mathbb{N}$, soit $f_m : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f_m(x) = \sum_{n=1}^m e^{-nx} \frac{\sin(nx)}{x^2 + n^2}.$$

Si $m = 0$, f_m est la fonction nulle. C'est clair que f_m est continue et intégrable (sur $\mathbb{R}_{\geq 0}$), pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, puisqu'il s'agit d'une somme finie de fonctions continues et intégrables. En outre, pour $m, m' \in \mathbb{N}$ tels que $m > m'$ on voit bien que

$$|f_m(x) - f_{m'}(x)| \leq \sum_{n=m'+1}^m e^{-nx} \frac{|\sin(nx)|}{x^2 + n^2} \leq \sum_{n=m'+1}^m e^{-x} \frac{1}{n^2} \leq e^{-x} \sum_{n=m'+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \leq \sum_{n=m'+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2},$$

où l'on a utilisé que $n^2 \leq n^2 + x^2$ et $e^{-nx} \leq e^{-x} \leq 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Cela nous dit que la suite $\{f_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans l'espace vectoriel $\mathcal{B}(\mathbb{R}_{\geq 0}, \mathbb{R})$ de fonctions bornées muni de la norme infini, ce qui implique que $\{f_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur \mathbb{R} . En conséquence, f est continue.

Par ailleurs, comme $\sum_{n=1}^{+\infty} 1/n^2$ converge vers une valeur $C > 0$ (en fait, $C = \pi^2/6$), $|f_m(x)| \leq Ce^{-x}$, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. On remarque que e^{-x} est intégrable sur $\mathbb{R}_{\geq 0}$. Le théorème de convergence dominée nous dit alors que f est intégrable sur $\mathbb{R}_{\geq 0}$. \square

Exercice 65 Montrer que la fonction $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{x^2 + n^2}$$

est continue et intégrable (sur $\mathbb{R}_{\geq 0}$) et que

$$\int_0^{+\infty} f(x) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + n^2}.$$

Proof. Pour $m \in \mathbb{N}^*$, soit $f_m : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f_m(x) = \sum_{n=1}^m \frac{(-1)^{n-1}}{x^2 + n^2}.$$

C'est clair que f_m est continue et intégrable (sur $\mathbb{R}_{\geq 0}$), pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, puisqu'il s'agit d'une somme finie de fonctions continues et intégrables. En outre, le critère de Leibniz nous dit que la suite $(f_m)_{m \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers f . L'inégalité $x^2 + n^2 \leq x^2 + (n+1)^2$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, nous dit que $f_{2m}(x) \geq 0$ pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Cela implique aussi que $f_{2m+1}(x) = f_{2m}(x) + 1/(x^2 + (2m+1)^2) \geq 0$. En plus, on voit bien que

$$f_{2m}(x) \leq f_{2m+1}(x) = \frac{1}{x^2 + 1} + \sum_{n=1}^m \left(\frac{1}{x^2 + (2n+1)^2} - \frac{1}{x^2 + (2n)^2} \right) \leq \frac{1}{x^2 + 1}.$$

En conséquence, $0 \leq f_m(x) \leq f_1(x) = 1/(1+x^2)$. Le théorème de convergence dominée nous dit alors que f est intégrable sur $\mathbb{R}_{\geq 0}$. En outre, le théorème de Dini nous dit que $(f_m)_{m \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur tout intervalle fini, ce qui implique que f est continue. \square

Exercice 66 Soit $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et intégrable.

1. Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} e^{-nt} f(t) dt = 0.$$

2. Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \int_0^{+\infty} e^{-nt} f(t) dt = f(0).$$

Proof.

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_n(t) = e^{-nt} f(t)$. Alors, c'est clair que $(f_n(t))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers 0 pour tout $t > 0$. En outre, $|f_n(t)| = |f(t)|e^{-nt} \leq |f(t)|$, pour tout $t > 0$. Le théorème de convergence dominée nous dit alors que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} e^{-nt} f(t) dt = \int_0^{+\infty} 0 dt = 0.$$

2. On note d'abord que l'égalité demandée est équivalente à

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} n e^{-nt} (f(t) - f(0)) dt = 0.$$

Soit $\epsilon > 0$. Comme f est continue en 0, il existe $\delta > 0$ tel que $|f(t) - f(0)| < \epsilon/2$ si $x \in [0, \delta]$. On fixe désormais un possible δ comme ci-dessus. En particulier,

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{\delta} n e^{-nt} (f(t) - f(0)) dt \right| &\leq \int_0^{\delta} n e^{-nt} |f(t) - f(0)| dt \leq \frac{\epsilon}{2} \int_0^{\delta} n e^{-nt} dt \\ &= \frac{\epsilon}{2} (1 - e^{-n\delta}) \leq \frac{\epsilon}{2}. \end{aligned}$$

Comme $e^x \geq 1 + x$, pour tout $x \geq 0$, on en déduit que $e^{nt/2} \geq nt/2$, *i.e.* $n e^{-nt/2} \leq 2/t$, pour tout $t > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Cela implique que $n e^{-nt} \leq 2e^{-nt/2}/t$, pour tout $t > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$. En conséquence,

$$\int_{\delta}^{+\infty} n e^{-nt} |f(t)| dt \leq \frac{2}{\delta} \int_{\delta}^{+\infty} e^{-nt/2} |f(t)| dt,$$

qui converge vers zéro d'après le premier item, *i.e.* il existe $n_0 = n_0(\epsilon, \delta) \in \mathbb{N}^*$ tel que la dernière intégrale est majorée par $\epsilon\delta/8$, si $n \geq n_0$. En outre,

$$\int_{\delta}^{+\infty} n e^{-nt} |f(0)| dt = |f(0)| e^{-n\delta},$$

qui tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, *i.e.* il existe $n_1 = n_1(\epsilon, \delta) \in \mathbb{N}^*$ tel que $|f(0)|e^{-n\delta}$ est majorée par $\epsilon/4$, si $n \geq n_1$. Finalement, si $n_2 = \max(n_0, n_1)$,

$$\begin{aligned} &\left| \int_0^{+\infty} n e^{-nt} (f(t) - f(0)) dt \right| \\ &= \left| \int_0^{\delta} n e^{-nt} (f(t) - f(0)) dt \right| + \left| \int_{\delta}^{+\infty} n e^{-nt} (f(t) - f(0)) dt \right| \\ &\leq \left| \int_0^{\delta} n e^{-nt} (f(t) - f(0)) dt \right| + \int_{\delta}^{+\infty} n e^{-nt} (|f(t)| + |f(0)|) dt \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} = \epsilon, \end{aligned}$$

si $n \geq n_2$.

□

Exercice 67 Posons

$$f_n(x) = \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n},$$

avec $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n} dx$$

2. Montrer que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n} dx = 2\sqrt{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-2}(y) dy$$

et en déduire que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

Proof.

1. Comme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{y}{n}\right)^n = e^y,$$

pour tout $y \in \mathbb{R}$, on conclut que f_n converge simplement vers e^{-x^2} . Par ailleurs, c'est clair que

$$|f_n(x)| = \frac{1}{(1 + n^{-1}x^2)^n} = \frac{1}{1 + x^2 + \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} x^{2k} n^{-k}} \leq \frac{1}{1 + x^2},$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Comme $1/(1 + x^2)$ est intégrable sur \mathbb{R} , le théorème de convergence dominée nous dit alors que e^{-x^2} est intégrable sur \mathbb{R} et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n} dx.$$

2. La première égalité de cet item se trouve directement de faire la substitution $x = \sqrt{n} \tan(y)$ et utiliser que la fonction $\cos^{2n-2}(y)$ est paire.

Une intégration par parties nous dit que

$$\int \cos^m(x) dx = -\frac{1}{m} \cos^{m-1}(x) \sin(x) + \frac{m-1}{m} \int \cos^{m-2}(x) dx,$$

pour tout entier $m \geq 2$. En conséquence,

$$\int_0^{\pi/2} \cos^{2n-2}(x) dx = \frac{2n-3}{2n-2} \int_0^{\pi/2} \cos^{2n-4}(x) dx,$$

pour tout entier $n \geq 2$, *i.e.*

$$\int_0^{\pi/2} \cos^{2n-2}(x) dx = \frac{2n-3}{2n-2} \cdots \frac{1}{2} \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \prod_{i=1}^{n-1} \frac{2i-1}{2i}.$$

Le produit de Wallis (voir le dernier item de l'exercice 10 de la fiche 1) nous dit que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2\sqrt{n} \frac{\pi}{2} \prod_{i=1}^{n-1} \frac{2i-1}{2i} = \sqrt{\pi}.$$

□

Exercice 68 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $x \mapsto xf(x)$ soit intégrable sur \mathbb{R} . Montrer que la fonction $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par $F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt} f(t) dt$ est définie sur \mathbb{R} et elle est de classe C^1 . Calculer sa fonction dérivée.

Proof. On voit que la fonction $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ donnée par $(x, t) \mapsto e^{-ixt} f(t)$ est dérivable par rapport à x . Sa dérivée partielle selon x est $(x, t) \mapsto -itf(t)e^{-ixt}$ est une fonction continue, qui satisfait que

$$\left| \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) \right| = | -itf(t)e^{-ixt} | = |tf(t)|.$$

En outre, $|g(x, t)| = |f(t)|$. Le théorème de différentiation sous le signe de l'intégral implique que F est de classe C^1 et sa dérivée est

$$F'(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} -itf(t)e^{-ixt} dt.$$

□

Exercice 69 Étudier l'intégrabilité des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto 1/\sqrt[3]{x-1}$ sur $]0, 1[$,
2. $x \mapsto \cos(x)/\sqrt{1-\sin(x)}$ sur $]0, \pi/2[$,
3. $x \mapsto 1/(x^2+x+1)$ sur $\mathbb{R}_{\geq 0}$,
4. $x \mapsto (x^2+x)e^x$ sur $\mathbb{R}_{\leq 0}$,
5. $x \mapsto 1/\ln(x)$ sur $]0, 1[$,
6. $x \mapsto 1/\sqrt{1-x^2}$ sur $] -1, 1[$.

Proof.

1. C'est clair que

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}} dx = \frac{3}{2} \left[\sqrt[3]{(x-1)^2} \right]_0^1 = -\frac{3}{2}.$$

2. On voit bien que

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos(x)}{\sqrt{1-\sin(x)}} dx = -2 \left[\sqrt{1-\sin(x)} \right]_0^{\pi/2} = 2.$$

3. C'est clair que

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+x+1} dx = \frac{2}{\sqrt{3}} \left[\arctan \left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}} \right) \right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right).$$

4. On voit bien que

$$\int_{-\infty}^0 (x^2+x)e^x dx = \left[(x^2-x+1)e^x \right]_{-\infty}^0 = 1.$$

5. C'est clair que

$$\int_0^1 \frac{1}{|\ln(x)|} dx = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-y}}{y} dy,$$

où l'on a fait la substitution $y = -\ln(x)$. Comme

$$\int_0^1 \frac{e^{-y}}{y} dy \geq \int_0^1 \frac{e^{-1}}{y} dy = e^{-1} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} [\ln(y)]_{\epsilon}^1$$

diverge (vers $+\infty$), l'intégrale demandée est aussi divergente.

6. On voit bien que

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \left[\arcsin(x) \right]_{-1}^1 = \pi.$$

□

Exercice 70 Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on définit la fonction $f_\alpha : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$ via

$$f_\alpha(x) = \frac{\ln(1+x)}{x^\alpha}.$$

Déterminer les valeurs de α telles que f_α soit intégrable (sur $\mathbb{R}_{>0}$).

Proof. On remarque d'abord que, comme $f_\alpha(x) \geq 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}_{>0}$, f_α est intégrable (sur $\mathbb{R}_{>0}$) si et seulement si l'intégrale (sur $\mathbb{R}_{>0}$) est bornée. Si $\beta > 0$, $\ln(1+x)/x^\beta$ tend vers zéro quand x tend vers $+\infty$. Cela implique qu'il existe $C > 0$ tel que $\ln(1+x) \leq x^\beta$ pour tout $x \geq C$. Sans perte de généralité on peut prendre $C > 1$. En conséquence, si $\alpha > 1$, on trouve que

$$\frac{\ln(1+x)}{x^\alpha} \leq \frac{x^{(1-\alpha)/2}}{x^\alpha} = \frac{1}{x^{(3\alpha-1)/2}},$$

pour tout $x \geq C$. Comme $(3\alpha-1)/2 > 1$, on conclut que la dernière intégrale dans

$$\int_C^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^\alpha} dx \leq \int_C^{+\infty} \frac{1}{x^{(3\alpha-1)/2}} dx$$

est bornée, ce qui implique que la première l'est aussi. Cela nous dit que, pour $\alpha > 1$, f_α est intégrable (sur $\mathbb{R}_{>0}$) si et seulement si l'intégrale $\int_0^C \ln(1+x)/x^\alpha dx$ converge. En plus, comme $\ln(1+x)/x$ tend vers 1 quand x tend vers zéro, on voit qu'il existe $\delta > 0$ tel que $1/2 < \ln(1+x)/x < 3/2$ si $x \in]0, \delta]$. Sans perte de généralité on peut prendre $\delta < 1 < C$. Comme $\ln(1+x)/x$ est continue sur $\mathbb{R}_{>0}$, l'intégrale $\int_\delta^C \ln(1+x)/x^\alpha dx$ converge, ce qui nous dit que, pour $\alpha > 1$, f_α est intégrable (sur $\mathbb{R}_{>0}$) si et seulement si l'intégrale $\int_0^\delta \ln(1+x)/x^\alpha dx$ converge. Alors,

$$\int_0^\delta \frac{1}{2x^{\alpha-1}} dx \leq \int_0^\delta \frac{\ln(1+x)}{x^\alpha} dx \leq \int_0^\delta \frac{3}{2x^{\alpha-1}} dx.$$

Comme les première et dernière intégrales convergent si et seulement si $\alpha < 2$, on conclut que f_α est intégrable (sur $\mathbb{R}_{>0}$) si $\alpha \in]1, 2[$, et elle diverge si $\alpha \geq 2$.

En outre, on voit bien que

$$\frac{\ln(1+x)}{x^\alpha} \geq \frac{\ln(2)}{x^\alpha},$$

si $x \geq 1$. Cela implique que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^\alpha} dx \geq \int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^\alpha} dx \geq \int_1^{+\infty} \frac{\ln(2)}{x^\alpha} dx,$$

et comme la dernière intégrale diverge (vers $+\infty$) si $\alpha \leq 1$, alors, la première intégrale aussi, ce qui nous dit que f_α n'est pas intégrable (sur $\mathbb{R}_{>0}$) si $\alpha \leq 1$. \square

Exercice 71 Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on définit la fonction $f_\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ via

$$f_\alpha(x) = \frac{1}{(x^2 + 1)^\alpha}.$$

1. Déterminer les valeurs de α telles que f_α soit intégrable (sur \mathbb{R}).
2. On note I_α l'intégrale de f_α sur \mathbb{R} pour les valeurs de α déterminées dans l'item précédent. Établir une relation de récurrence entre les différentes valeurs I_α et en déduire l'expression de I_n pour $n \in \mathbb{N}^*$.
3. Exprimer l'intégrale :

$$J_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 2px + q)^n}$$

en fonction de I_n , lorsque p et q sont deux réels vérifiant l'inégalité $q - p^2 > 0$. En déduire l'expression de J_n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Proof.

1. On remarque d'abord que, comme $f_\alpha(x) \geq 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, f_α est intégrable (sur \mathbb{R}) si et seulement si l'intégrale (sur \mathbb{R}) est bornée. En outre, comme $f_\alpha(x)$ est une fonction paire, f_α est intégrable sur \mathbb{R} si et seulement si elle est intégrable sur $\mathbb{R}_{\geq 0}$. Comme $f_\alpha(x)$ est continue sur \mathbb{R} , l'intégrale $\int_0^1 f_\alpha(x) dx$ converge, ce qui nous dit que, f_α est intégrable (sur \mathbb{R}) si et seulement si l'intégrale $\int_1^{+\infty} f_\alpha(x) dx$ converge. Or,

$$\frac{1}{2^\alpha x^{2\alpha}} \leq \frac{1}{(x^2 + 1)^\alpha} \leq \frac{1}{x^{2\alpha}},$$

si $x \geq 1$. Si $\alpha > 1/2$, alors l'inégalité

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{(x^2 + 1)^\alpha} dx \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{2\alpha}} dx,$$

nous dit que la première intégrale est convergente, *i.e.* f_α est intégrable sur \mathbb{R} pour $\alpha > 1/2$, tandis que, si $\alpha \leq 1/2$, alors l'inégalité

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{(x^2 + 1)^\alpha} dx \geq \int_1^{+\infty} \frac{1}{2^\alpha x^{2\alpha}} dx,$$

nous dit que la première intégrale diverge, *i.e.* f_α n'est pas intégrable sur \mathbb{R} pour $\alpha \leq 1/2$.

2. On suppose désormais $\alpha > 3/2$. On voit bien que

$$\begin{aligned} I_\alpha &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2 + 1)^\alpha} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 + x^2}{(x^2 + 1)^\alpha} dx - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2 + 1)^\alpha} dx \\ &= I_{\alpha-1} + \left[\frac{x}{2(\alpha-1)(x^2+1)^{\alpha-1}} \right]_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2(1-\alpha)(x^2+1)^{\alpha-1}} dx, \end{aligned}$$

où l'on a fait une intégration par parties avec $u = x$ et $v' = x/(1+x^2)^\alpha$ (i.e. $v = (1+x^2)^{1-\alpha}/(2(1-\alpha))$) dans la dernière égalité. Comme $\alpha > 3/2$ le deuxième opérande du dernier membre de l'équation précédente est nul. On conclut que

$$I_\alpha = I_{\alpha-1} + \frac{I_{\alpha-1}}{2(1-\alpha)} = \frac{2\alpha-3}{2\alpha-2} I_{\alpha-1},$$

pour tout $\alpha > 3/2$, ou, de façon équivalente, $I_{\alpha+1} = (2\alpha-1)I_\alpha/(2\alpha)$, pour tout $\alpha > 1/2$. En conséquence,

$$I_n = I_1 \prod_{m=1}^{n-1} \frac{2m-1}{2m} = \pi \prod_{m=1}^{n-1} \frac{2m-1}{2m},$$

puisque

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+1} dx = \left[\arctan(x) \right]_{-\infty}^{+\infty} = \pi.$$

3. C'est clair que

$$\begin{aligned} J_n &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+2px+q)^n} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{((x+p)^2+(q-p^2))^n} \\ &= \frac{1}{(q-p^2)^{n-1/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{(y^2+1)^n} = \frac{1}{(q-p^2)^{n-1/2}} I_n, \end{aligned}$$

où l'on a fait la substitution $x+p = \sqrt{q-p^2}y$.

□

Exercice 72 Soit $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction uniformément continue et intégrable (sur $\mathbb{R}_{\geq 0}$). Montrer que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

Proof. On va procéder par l'absurde. Si la dernière limite n'est pas vérifiée, alors il existe $\epsilon > 0$ et une suite croissante $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{\mathbb{N}}$ qui converge vers $+\infty$ telle que $f(x_n) > \epsilon$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. On suppose sans perte de généralité que $x_{n+1} > x_n + 2$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $x_0 > 1$. Comme f est uniformément continue, il existe $\delta > 0$ tel que $|f(x) - f(x_n)| < \epsilon/2$, pour tout $x \in [x_n - \delta, x_n + \delta]$ et tout $n \in \mathbb{N}$. On suppose sans perte de généralité que $\delta < 1$. Cela implique que $[x_n - \delta, x_n + \delta] \cap [x_m - \delta, x_m + \delta] = \emptyset$, si $n \neq m$. L'inégalité triangulaire nous dit que $|f(x)| > |f(x_n)| - |f(x) - f(x_n)| > \epsilon - \epsilon/2 = \epsilon/2$, pour tout $x \in [x_n - \delta, x_n + \delta]$ et tout $n \in \mathbb{N}$. En conséquence, si $I = \sqcup_{n \in \mathbb{N}} [x_n - \delta, x_n + \delta] \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$, on voit que

$$\int_0^{+\infty} |f(x)| dx \geq \int_I |f(x)| dx = \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_{x_n - \delta}^{x_n + \delta} |f(x)| dx \geq \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_{x_n - \delta}^{x_n + \delta} \frac{\epsilon}{2} dx = \sum_{n \in \mathbb{N}} \delta \epsilon,$$

ce qui implique que f n'est pas absolument convergente. □

Exercice 73 Soit $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ une fonction continue par morceaux, décroissante et intégrable (sur $\mathbb{R}_{\geq 0}$). Montrer que la fonction $g : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par l'expression $g(x) = x(f(x) - f(x+1))$ est intégrable (sur $\mathbb{R}_{\geq 0}$) et calculer la valeur de son intégrale sur $\mathbb{R}_{\geq 0}$.

Proof. Pour $M > 0$, on note $I_M = \int_0^M f(x)dx$, avec limite $I = \int_0^{+\infty} f(x)dx$, quand M tend vers $+\infty$. On voit bien que

$$\begin{aligned} \int_0^M x(f(x) - f(x+1))dx &= \int_0^M xf(x)dx - \int_0^M xf(x+1)dx \\ &= \int_0^M xf(x)dx - \int_0^M (x+1)f(x+1)dx + \int_0^M f(x+1)dx \\ &= \int_0^M xf(x)dx - \int_1^{M+1} yf(y)dy + \int_1^{M+1} f(y)dy \\ &= \int_0^1 xf(x)dx - \int_M^{M+1} yf(y)dy + \int_1^{M+1} f(y)dy \end{aligned}$$

où l'on a fait la substitution $y = x + 1$. C'est clair que la première intégrale du dernier membre converge, puisque $xf(x)$ est une fonction continue par morceaux sur $[0, 1]$. En outre, la dernière intégrale du dernier membre converge vers $I - I_1$ quand M tend vers $+\infty$. Il reste à démontrer que le deuxième opérande converge quand M tend vers $+\infty$. Or,

$$\int_M^{M+1} yf(y)dy \leq f(M) \int_M^{M+1} ydy = f(M) \left(M + \frac{1}{2} \right).$$

L'inégalité

$$\frac{M}{2} f(M) \leq \int_{M/2}^M f(y)dy$$

nous dit que $Mf(M)$ converge vers zéro quand M tend vers $+\infty$ et en conséquence, l'intégrale $\int_M^{M+1} yf(y)dy$ converge vers zéro quand M tend vers $+\infty$. Cela implique que la limite de $\int_0^M x(f(x) - f(x+1))dx$ quand M tend vers $+\infty$ existe et elle vaut $\int_0^1 xf(x)dx + I - I_1$. \square

Exercice 74

1. Montrer que, pour $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}\pi$ et $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(2kx) = \frac{\sin((2n+1)x)}{2\sin(x)}.$$

En déduire

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)x)}{\sin x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

2. Vérifier que l'application $f : [0, \pi/2] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin(x)}, & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

est de classe C^1 . En déduire que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)x)}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

3. En conclure que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

4. Montrer que

$$\left| \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \frac{\sin(x)}{x} dx \right| \geq \frac{2}{n\pi}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. En déduire que $\int_0^{+\infty} (\sin(x)/x) dx$ n'est pas absolument convergente. On dit dans ce cas qu'elle est *semi-convergente*.

Proof.

1. On voit bien que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(2kx) &= -\frac{1}{2} + \operatorname{Re} \left(\sum_{k=0}^n e^{i2kx} \right) = -\frac{1}{2} + \operatorname{Re} \left(\frac{e^{i(2n+1)x} - 1}{e^{i2x} - 1} \right) \\ &= -\frac{1}{2} + \operatorname{Re} \left(\frac{e^{i(2n+1)x} - e^{-ix}}{e^{ix} - e^{-ix}} \right) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2 \sin(x)} \operatorname{Re} \left(i(e^{i(2n+1)x} - e^{-ix}) \right) \\ &= -\frac{1}{2} - \frac{1}{2 \sin(x)} \left(-\sin((2n+1)x) - \sin(x) \right) = \frac{\sin((2n+1)x)}{2 \sin(x)}, \end{aligned}$$

pour $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}\pi$. En conséquence,

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)x)}{\sin x} dx &= \int_0^{\pi/2} dx + 2 \sum_{k=1}^n \int_0^{\pi/2} \cos(2kx) dx \\ &= \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^n \left[\frac{\sin(2kx)}{k} \right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

2. C'est clair que f est C^1 en tout point $x \in [0, \pi/2]$ différent de zéro. En plus,

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{\cos(x)}{\sin(x)^2},$$

si $x \in]0, \pi/2]$. En outre, la règle de Bernoulli-L'Hôpital nous dit que

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - x}{x^2 \sin(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{2x \sin(x) + x^2 \cos(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin(x)}{(2 - x^2) \sin(x) + 4x \cos(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\cos(x)}{-6x \sin(x) + (6 - x^2) \cos(x)} = -\frac{1}{6}. \end{aligned}$$

La même règle nous dit que

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} f'(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cos(x) - \sin^2(x)}{x^2 \sin^2(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cos(x) - x^2 \sin(x) - \sin(2x)}{2x \sin^2(x) + x^2 \sin(2x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2 - x^2) \cos(x) - 4x \sin(x) - 2 \cos(2x)}{2 \sin^2(x) + 4x \sin(x) + 2x^2 \cos(2x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-6x \cos(x) + (x^2 - 6) \sin(x) + 4 \sin(2x)}{(6 - 4x^2) \sin(2x) + 12x \cos(2x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 - 12) \cos(x) + 8x \sin(x) + 8 \cos(2x)}{-32x \sin(2x) + (24 - 8x^2) \cos(2x)} = -\frac{1}{6} = f'(0). \end{aligned}$$

Cela implique que f est de classe C^1 . Le lemme de Riemann-Lebesgue nous dit alors que

$$0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\pi/2} \sin((2n+1)x) f(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)x)}{x} - \frac{\pi}{2}.$$

3. On voit bien que

$$\int_0^{\pi(n+1/2)} \frac{\sin(y)}{y} dy = \frac{\pi/2 \sin((2n+1)x)}{x},$$

où l'on a fait la substitution $y = (2n+1)x$. Or, on remarque que l'on a déjà démontré que la limite

$$\lim_{M \rightarrow +\infty} \int_0^M \frac{\sin(y)}{y} dy$$

existe (voire l'exercice 4, (e)). Cela implique que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\pi(n+1/2)} \frac{\sin(y)}{y} dy = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi/2 \sin((2n+1)x)}{x} = \frac{\pi}{2}.$$

4. On voit bien que

$$\left| \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \frac{\sin(x)}{x} dx \right| = \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} (-1)^{n+1} \frac{\sin(x)}{x} dx \geq \frac{1}{n\pi} \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} (-1)^{n+1} \sin(x) dx = \frac{2}{n\pi},$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Comme

$$\int_0^{N\pi} \frac{|\sin(x)|}{x} dx = \sum_{n=1}^N \left| \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \frac{\sin(x)}{x} dx \right| \geq \sum_{n=1}^N \frac{2}{n\pi},$$

pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, on conclut que $\int_0^{+\infty} (\sin(x)/x) dx$ n'est pas absolument convergente.

□

Exercice 75 Déterminer si les intégrales suivantes sont convergentes ou absolument convergentes :

(a) $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{\sqrt{x} + \cos(x)} dx$, (b) $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{\sqrt{x} + \sin(x)} dx$.

Proof. On remarque d'abord que $\sqrt{x} + \cos(x) \neq 0$ et $\sqrt{x} + \sin(x) \neq 0$, pour tout $x \geq 1$. C'est facile à voir que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(x)/(\sqrt{x} + \cos(x))}{\sin(x)/\sqrt{x}} = 1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(x)/(\sqrt{x} + \sin(x))}{\sin(x)/\sqrt{x}} = 1.$$

L'exercice 19 de la fiche 6 dit que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \sin(x)/\sqrt{x} dx$ converge, mais la convergence n'est pas absolue. L'exercice 4 implique alors que intégrales données sont convergentes mais elles ne sont pas absolument convergentes. □

Exercice 76 Soient f et g des fonctions réelles continues par morceaux sur $[a, b]$ et supposons $g(x) > 0$, pour tout $x \in [a, b]$.

1. Montrer que si g est intégrable sur $[a, b[$ alors

$$f = o_b(g) \implies \int_x^b f = o_b\left(\int_x^b g\right)$$

et

$$f \sim_b g \implies \int_x^b f \sim_b \int_x^b g.$$

2. Montrer que si g n'est pas intégrable sur $[a, b[$ alors

$$f = o_b(g) \implies \int_a^x f = o_b\left(\int_a^x g\right)$$

et

$$f \sim_b g \implies \int_a^x f \sim_b \int_a^x g.$$

Proof. Il s'agit d'un résultat du cours. \square

Exercice 77 On considère la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\arctan(t)}{1+t^2} dt.$$

Trouver un équivalent de $f(x)$ de la forme C/x^α (avec $C \in \mathbb{R}$ et $\alpha > 0$) lorsque x tend vers $+\infty$.

Proof. On voit bien que

$$f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\arctan(t)}{1+t^2} dt = \lim_{M \rightarrow +\infty} \left[\frac{\arctan^2(t)}{2} \right]_x^M = \frac{\pi^2}{8} - \frac{\arctan^2(x)}{2}.$$

En outre,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{\pi/(2x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi^2 - 4 \arctan^2(x)}{4\pi/x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \arctan(x)/(1+x^2)}{\pi/x^2} = 1,$$

où l'on a utilisé la règle de Bernoulli-L'Hôpital. \square

Exercice 78

1. Montrer la fonction $\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{p-1} dt$ est définie et de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_{>0}$.
2. Montrer que, pour tout $p > 0$, $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$. En déduire la valeur $\Gamma(n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
3. Montrer que

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

et en déduire les valeurs $\Gamma(n + \frac{1}{2})$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Proof.

1. On va montrer la convergence de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} e^{-t} t^{p-1} |\ln^n(t)| dt = \int_0^1 e^{-t} t^{p-1} |\ln^n(t)| dt + \int_1^{+\infty} e^{-t} t^{p-1} |\ln^n(t)| dt,$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme la fonction $e^{-t} t^{p-1} |\ln^n(t)| > 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}_{>0}$, l'intégrale est convergente si et seulement si elle est bornée. Si $t \in]0, 1]$, alors $e^{-t} t^{p-1} |\ln^n(t)| \leq t^{p-1} |\ln^n(t)|$, ce qui dit que

$$\int_0^1 e^{-t} t^{p-1} |\ln^n(t)| dt \leq \int_0^1 t^{p-1} |\ln^n(t)| dt.$$

On remarque que $t^\alpha |\ln^n(t)|$ converge vers zéro quand t tend vers 0, pour tout $\alpha > 0$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors il existe $\delta > 0$ tel que $t^\alpha |\ln^n(t)| < 1$, pour tout $t \in]0, \delta]$. Soit $0 < \alpha < p$. Alors $t^{p-1} |\ln^n(t)| \leq t^{p-1-\alpha}$, pour tout $t \in]0, \delta]$. Cela implique que les intégrales

$$\int_0^\delta t^{p-1} |\ln^n(t)| dt \leq \int_0^\delta t^{p-1-\alpha} dt$$

convergent, puisque $p-1-\alpha > -1$. En outre, l'intégrale

$$\int_\delta^1 t^{p-1} |\ln^n(t)| dt$$

converge, puisque $t^{p-1} |\ln^n(t)|$ est continue sur $[\delta, 1]$. On conclut que

$$\int_0^1 t^{p-1} |\ln^n(t)| dt$$

est convergente si $p > 0$, ce qui implique que $\int_0^1 e^{-t} t^{p-1} |\ln^n(t)| dt$ l'est aussi.

Par ailleurs, si $t \geq 1$, on voit que $e^{-t} t^{p-1} |\ln^n(t)| \leq e^{-t/2} |\ln^n(t)|$. Cela implique que

$$\int_1^{+\infty} e^{-t} t^{p-1} |\ln^n(t)| dt \leq \int_1^{+\infty} e^{-t/2} |\ln^n(t)| dt.$$

On remarque que $e^{-t/4} |\ln^n(t)|$ converge vers zéro quand t tend vers $+\infty$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors il existe $C > 1$ tel que $e^{-t/4} |\ln^n(t)| < 1$, pour tout $t \in \mathbb{R}_{\geq C}$. Cela implique que les intégrales

$$\int_C^{+\infty} e^{-t/2} |\ln^n(t)| dt \leq \int_C^{+\infty} e^{-t/4} dt$$

convergent. En outre, l'intégrale

$$\int_1^C e^{-t/2} |\ln^n(t)| dt$$

converge, puisque $e^{-t/2} |\ln^n(t)|$ est continue sur $[1, C]$. On conclut que $\int_1^{+\infty} e^{-t/2} |\ln^n(t)| dt$

est convergente, ce qui implique que $\int_1^{+\infty} e^{-t} t^{p-1} |\ln^n(t)| dt$ l'est aussi. En consé-

quence, $\int_0^{+\infty} e^{-t} t^{p-1} dt$ converge.

Soit $f : \mathbb{R}_{>0}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par $f(t, p) = e^{-t}t^{p-1}$. On voit que

$$\frac{\partial^n f}{\partial p^n}(t, p) = e^{-t}t^{p-1} \ln^n(t).$$

D'après les majorations dans les paragraphes précédents, on voit que, pour tout $p > 0$, il existe un voisinage V de p tel que $|e^{-t}t^{p-1} \ln^n(t)|$ est majorée par une fonction intégrable. Le théorème de différentiation sous le signe de l'intégral nous dit alors que Γ est de classe C^∞ et que

$$\Gamma^{(n)}(p) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{p-1} \ln^n(t) dt.$$

2. On voit bien que

$$\Gamma(p+1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^p dt = \lim_{M \rightarrow +\infty} \left[-e^{-t}t^p \right]_0^M + p \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{p-1} dt = p\Gamma(p),$$

où l'on a fait une intégration par parties avec $u = t^p$ et $v' = e^{-t}$. Comme $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1$, on conclut que $\Gamma(n) = (n-1)!$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

3. On voit bien que

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\sqrt{t} dt = 2 \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi},$$

où l'on a fait la substitution $t = x^2$. D'après l'item précédent, on voit que

$$\Gamma(n+1/2) = \frac{(2n-1)!!\sqrt{\pi}}{2^n},$$

où l'on rappelle que $(2n+1)!! = (2n-1)!!(2n+1)$ et $1!! = 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

□

Exercice 79 On définit la fonction $F : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$ via

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x^2 + t^2} dt.$$

1. Montrer que la fonction F est de classe C^∞ .
2. Trouver les limites en 0 et en $+\infty$ de F .
3. Étudier le signe et les variations de F sur $\mathbb{R}_{>0}$.

Indication : pour $x > 0$ fixé, étudier la suite

$$u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin(t)|}{x^2 + t^2} dt.$$

Proof.

1. Soit $f : \mathbb{R}_{>0}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par $f(t, x) = \sin(t)/(x^2 + t^2)$. Un argument par récurrence simple nous dit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme P_n à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n tel que

$$\frac{\partial^n f}{\partial x^n}(t, x) = \frac{P_n(x) \sin(t)}{(x^2 + t^2)^{n+1}}.$$

En conséquence,

$$\left| \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(t, x) \right| \leq \frac{|P_n(x)|}{(x^2 + t^2)^{n+1}},$$

pour tout $(t, x) \in \mathbb{R}_{>0}^2$. Le théorème de différentiation sous le signe de l'intégral nous dit alors que F est de classe C^∞ .

2. Pour $x > 0$, on voit bien que

$$F(x) = \frac{1}{x^2} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{1 + (t/x)^2} dt = \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xy)}{1 + y^2} dy,$$

où l'on a fait la substitution $y = t/x$. En conséquence,

$$|F(x)| \leq \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + y^2} dy \leq \frac{\pi}{2x},$$

ce qui dit que la limite de $F(x)$ quand x tend vers $+\infty$ est zéro.

Comme $\sin(t)/t$ converge vers 1 quand t tend vers 0, il existe $\delta > 0$ tel que $1/2 < \sin(t)/t$, pour tout $t \in \mathbb{R}_{>0}$ tel que $t \leq \delta$. Cela implique que

$$\int_0^\delta \frac{\sin(t)}{x^2 + t^2} dt \geq \int_0^\delta \frac{t}{2(x^2 + t^2)} dt = \left[\frac{\ln(x^2 + t^2)}{4} \right]_0^\delta = \frac{\ln(1 + (\delta/x)^2)}{4}.$$

On voit bien que le dernier membre diverge (vers $+\infty$) quand x tend vers zéro. En outre, on considère la fonction $g : \mathbb{R}_{\geq \delta} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par $g(t, x) = \sin(t)/(x^2 + t^2)$. On voit bien que $|g(t, x)| \leq 1/t^2$, pour tout $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, et $1/t^2$ est absolument intégrable sur $\mathbb{R}_{\geq \delta}$. Le théorème de convergence dominée nous dit que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \int_\delta^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x^2 + t^2} dt = \int_\delta^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^2} dt,$$

i.e. la limite de $\int_\delta^{+\infty} \sin(t)/(x^2 + t^2) dt$ converge quand x tend vers zéro. En conséquence, la limite de $F(x) = \int_0^{+\infty} \sin(t)/(x^2 + t^2) dt$ diverge quand x tend vers zéro

3. Pour tout $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ et $n \in \mathbb{N}$, on considère

$$u_n(x) = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin(t)|}{x^2 + t^2} dt \geq 0.$$

On remarque que $u_n(x) \geq u_{n+1}(x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ et $n \in \mathbb{N}$, puisque

$$\begin{aligned} u_{n+1}(x) &= \int_{(n+1)\pi}^{(n+2)\pi} \frac{|\sin(t)|}{x^2 + t^2} dt = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin(y)|}{x^2 + y^2 + \pi(\pi + 2t)} dy \\ &\leq \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin(y)|}{x^2 + y^2} dy = u_n(x), \end{aligned}$$

où l'on a fait la substitution $t = y + \pi$. En conséquence,

$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n u_n(x) = \sum_{m=0}^{+\infty} \underbrace{(u_{2m}(x) - u_{2m+1}(x))}_{\geq 0} \geq 0.$$

Par ailleurs, d'après le premier item on sait que

$$F'(x) = - \int_0^{+\infty} \frac{2x \sin(t)}{(x^2 + t^2)^2} dt.$$

Soit

$$v_n(x) = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{2x |\sin(t)|}{(x^2 + t^2)^2} dt \geq 0$$

pour tout $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ et $n \in \mathbb{N}$. Le même argument que pour $u_n(x)$ nous dit que $v_n(x) \geq v_{n+1}(x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ et $n \in \mathbb{N}$. Cela implique que

$$F'(x) = - \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n v_n(x) = - \sum_{m=0}^{+\infty} \underbrace{(v_{2m}(x) - v_{2m+1}(x))}_{\geq 0} \leq 0.$$

En conséquence, F est décroissante.

□

Exercice 80 On pose

$$B(u, v) = \int_0^1 t^{u-1} (1-t)^{v-1} dt.$$

1. Pour quelles valeurs de $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ cette intégrale est-elle définie? On note \mathcal{D} l'ensemble de ces valeurs.
2. Montrer que

$$B(u, v) = \int_0^{+\infty} \frac{s^{u-1}}{(1+s)^{u+v}} ds,$$

pour tout $(u, v) \in \mathcal{D}$.

3. Calculer $B(1/2, 1/2)$.
4. Prouver que $(u, v) \in \mathcal{D}$ si et seulement si $(v, u) \in \mathcal{D}$, et $B(v, u) = B(u, v)$.
5. Montrer que, si $(u, v) \in \mathcal{D}$, alors $(u+1, v), (u, v+1) \in \mathcal{D}$ et

$$B(u, v) = B(u+1, v) + B(u, v+1).$$

6. Au moyen d'une intégration par parties, prouver que

$$B(u+1, v) = \frac{u}{u+v} B(u, v),$$

pour tout $(u, v) \in \mathcal{D}$.

7. En déduire l'expression de $B(u+n, v)$ en fonction de $B(u, v)$ pour tout entier naturel non nul n .
8. Calculer $B(n, p)$, avec $(n, p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$.
9. Calculer $B(1/3, 2/3)$.

Proof.

1. Comme $t^{u-1}(1-t)^{v-1} \geq 0$ pour tout $t \in]0, 1[$, l'intégrale qui définit B est convergente si et seulement si elle est majorée. C'est facile à vérifier que $\mathcal{D} = \mathbb{R}_{>0}^2$. En effet, si $u \leq 0$, alors

$$\int_0^1 t^{u-1} (1-t)^{v-1} dt \geq \int_0^1 t^{u-1} dt.$$

Comme la dernière intégrale diverge (vers $+\infty$), la première intégrale aussi. Le cas de $v \leq 0$ est analogue.

2. L'expression donnée suit de fait la substitution $t = s/(s+1)$. On remarque que l'application de $\mathbb{R}_{\geq 0}$ dans $[0, 1[$ donnée par $s \mapsto s/(s+1)$ est strictement croissante (et donc bijective), différentiable, avec application réciproque $t \mapsto t/(1-t)$ différentiable.
3. La première partie de la question est triviale. En plus, c'est clair que

$$\begin{aligned} B(1/2, 1/2) &= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}} dt = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(1/4) - (t-1/2)^2}} dt = \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= \left[\arcsin(x) \right]_{-1}^1 = \pi, \end{aligned}$$

où l'on a fait la substitution $t - 1/2 = x/2$.

4. La première partie de la question est triviale. Par ailleurs, on voit bien que

$$B(u, v) = \int_0^1 t^{u-1}(1-t)^{v-1} dt = \int_0^1 (1-x)^{u-1}x^{v-1} dx = B(v, u),$$

où l'on a fait la substitution $x = 1 - t$.

5. La première partie de la question est triviale. D'ailleurs, c'est clair que

$$\begin{aligned} B(u, v) &= \int_0^1 t^{u-1}(1-t)^{v-1} dt = \int_0^1 t^{u-1}(1-t)^{v-1}(t + (1-t)) dt \\ &= \int_0^1 t^u(1-t)^{v-1} dt + \int_0^1 t^{u-1}(1-t)^v dt = B(u+1, v) + B(u, v+1). \end{aligned}$$

6. On voit bien que

$$\begin{aligned} B(u+1, v) &= \int_0^1 t^u(1-t)^{v-1} dt = -\frac{1}{v} \left[t^u(1-t)^v \right]_0^1 + \frac{u}{v} \int_0^1 t^{u-1}(1-t)^v dt \\ &= \frac{u}{v} B(u, v+1) = \frac{u}{v} (B(u, v) - B(u+1, v)), \end{aligned}$$

où l'on a fait une intégration par parties avec $f(t) = t^u$ et $g'(t) = (1-t)^{v-1}$ (i.e. $g(t) = -(1-t)^v/v$) et l'item précédent. En conséquence,

$$B(u+1, v) = \frac{u}{u+v} B(u, v).$$

7. C'est facile à vérifier par récurrence que

$$B(u+n, v) = \prod_{i=0}^{n-1} \frac{u+i}{u+i+v} B(u, v),$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

8. C'est facile à vérifier par récurrence que

$$B(n, p) = \frac{(n-1)!(p-1)!}{(n+p-1)!},$$

pour tout $(n, p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$.

9. D'après l'item (b), on voit bien que

$$\begin{aligned}
 B(1/3, 2/3) &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{s^2}(1+s)} ds = 3 \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^3} dx \\
 &= \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{1+x} - \frac{2x-1}{2(x^2-x+1)} + \frac{3/2}{x^2-x+1} \right) dx \\
 &= \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{1+x} - \frac{2x-1}{2(x^2-x+1)} + \frac{3/2}{(x-1/2)^2 + 3/4} \right) dx \\
 &= \lim_{M \rightarrow +\infty} \left[\ln(1+x) - \frac{\ln(x^2-x+1)}{2} + \sqrt{3} \arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) \right]_0^M \\
 &= \lim_{M \rightarrow +\infty} \left(\ln\left(\frac{M+1}{\sqrt{M^2-M+1}}\right) + \sqrt{3} \arctan\left(\frac{2M-1}{\sqrt{3}}\right) \right) + \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \\
 &= \frac{2\pi}{\sqrt{3}},
 \end{aligned}$$

où l'on a fait la substitution $s = x^3$ et on a utilisé $\arctan(1/\sqrt{3}) = \pi/6$.

□

Exercice 81

1. Montrer que, pour tout x réel, les intégrales généralisées

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} \cos(tx)}{\sqrt{t}} dt, \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} \sin(tx)}{\sqrt{t}} dt \text{ et } \int_0^{+\infty} \frac{e^{(-1+ix)t}}{\sqrt{t}} dt$$

convergent.

2. On définit alors 2 applications $u, v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et une application $z : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ par

$$u(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} \cos(tx)}{\sqrt{t}} dt, v(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} \sin(tx)}{\sqrt{t}} dt$$

et

$$z(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{(-1+ix)t}}{\sqrt{t}} dt.$$

Étudier la parité des applications u et v et montrer que $z(x) = u(x) + iv(x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

3. On pose $\lambda = u(0)$. Montrer que $\lambda > 1 - e^{-1}$.

4. Montrer que les applications u, v et z sont continues.

5. Montrer que, pour tout réel x , l'intégrale généralisée

$$\int_0^{+\infty} \sqrt{t} e^{(-1+ix)t} dt$$

converge.

6. Montrer que les applications u, v et z sont dérivables.

7. Prouver que

$$z'(x) = \frac{-1}{2(x+i)} z(x),$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Indication : on pourra utiliser une intégration par parties.

8. En déduire que les applications u, v et z sont indéfiniment dérivables.

Proof.

1. Par définition, l'intégrale sur $\mathbb{R}_{>0}$ d'une fonction $f : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{C}$ de la forme $f(x) = a(x) + ib(x)$, avec $a, b : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$, existe si et seulement si les intégrales de a et de b sur $\mathbb{R}_{>0}$ existent. En outre, par définition, une fonction complexe $f : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{C}$ est intégrable si sa valeur absolue $|f| : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ est intégrable. Il suffit alors d'étudier la convergence de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{|e^{(-1+ix)t}|}{\sqrt{t}} dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt = \int_0^1 \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt. \quad (14)$$

Comme $e^{-t}/\sqrt{t} \geq 0$ pour tout $t > 0$, il suffit de montrer que ces intégrales sont majorées. L'inégalité $1/\sqrt{t} \leq 1$ pour tout $t \geq 1$ nous dit que

$$\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt \leq \int_1^{+\infty} e^{-t} dt = e^{-1}.$$

En conséquence, la dernière intégrale dans (14) est convergente. Par ailleurs, si $0 < t \leq 1$, on voit que $e^{-t}/\sqrt{t} \leq 1/\sqrt{t}$, ce qui implique que

$$\int_0^1 \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt \leq \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}} dt = 2.$$

En conséquence, l'avant-dernière intégrale dans (14) est convergente. Par conséquent, les intégrales données sont absolument convergentes.

2. C'est clair que

$$u(-x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} \cos(-tx)}{\sqrt{t}} dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} \cos(tx)}{\sqrt{t}} dt = u(x)$$

et

$$v(-x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} \sin(-tx)}{\sqrt{t}} dt = - \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} \sin(tx)}{\sqrt{t}} dt = -v(x).$$

L'égalité $z(x) = u(x) + iv(x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, est une conséquence de la définition d'intégrale.

3. On voit que

$$\lambda = u(0) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt = \int_0^1 \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt > \int_0^1 e^{-t} dt = 1 - e^{-1},$$

où l'on a utilisé que $e^{-t}/\sqrt{t} \geq e^{-t}$ si $0 < t \leq 1$ et $e^{-t}/\sqrt{t} > 0$ si $t \geq 1$.

4. La majoration $|e^{-t}e^{itx}|/\sqrt{t} \leq e^{-t}/\sqrt{t}$ et le théorème de convergence dominée nous disent que z est une application continue, ce qui implique que u et v sont continues aussi.
5. Il suffit alors d'étudier la convergence de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} |e^{(-1+ix)t}| \sqrt{t} dt = \int_0^{+\infty} \sqrt{t} e^{-t} dt = \int_0^1 \sqrt{t} e^{-t} dt + \int_1^{+\infty} \sqrt{t} e^{-t} dt. \quad (15)$$

Comme $\sqrt{t}e^{-t} \geq 0$ pour tout $t > 0$, il suffit de montrer que ces intégrales sont majorées. L'inégalité $\sqrt{t}e^{-t} \leq e^{-t/2}$ pour tout $t \geq 1$ nous dit que

$$\int_1^{+\infty} \sqrt{t} e^{-t} dt \leq \int_1^{+\infty} e^{-t/2} dt = 2e^{-1/2}$$

En conséquence, la dernière intégrale dans (15) est convergente. Par ailleurs, si $0 < t \leq 1$, on voit que $e^{-t}\sqrt{t} \leq \sqrt{t}$, ce qui implique que

$$\int_0^1 \sqrt{t}e^{-t} dt \leq \int_0^1 \sqrt{t} dt = \frac{2}{3}.$$

En conséquence, l'avant-dernière intégrale dans (15) est convergente. Cela nous dit que la première 'intégrale dans (15) converge.

6. Soit $f : \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ donnée par $f(t, x) = e^{(-1+ix)t}/\sqrt{t}$. On remarque que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(t, x) = ie^{(-1+ix)t}\sqrt{t}.$$

L'inégalité $|ie^{(-1+ix)t}\sqrt{t}| \leq \sqrt{t}e^{-t}$ et le théorème de différentiation sous le signe de l'intégrale nous disent que z est une application différentiable, ce qui implique que u et v sont différentiables aussi. En plus,

$$z'(x) = i \int_0^{+\infty} e^{(-1+ix)t}\sqrt{t} dt.$$

7. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on voit bien que

$$\begin{aligned} z(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{e^{(-1+ix)t}}{\sqrt{t}} dt = \lim_{M \rightarrow +\infty} \left[2e^{(-1+ix)t}\sqrt{t} \right]_0^M - 2(-1+ix) \int_0^{+\infty} e^{(-1+ix)t}\sqrt{t} dt \\ &= -2i(i+x) \int_0^{+\infty} e^{(-1+ix)t}\sqrt{t} dt = -2(i+x)z'(x), \end{aligned}$$

où l'on a fait une intégration par parties avec $f(t) = e^{(-1+ix)t}$ et $g'(t) = 1/\sqrt{t}$.

8. Il s'agit d'une conséquence directe de l'item précédent.

□

Exercice 82 On considère l'expression

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{1+t} dt.$$

Calculer le domaine de définition de f (dans \mathbb{R}) et l'ensemble des points de continuité. En particulier, étudier

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$$

et un équivalent de f en $+\infty$.

Proof. D'abord, on voit bien que $f(0) = 0$. En outre, comme \sin est une fonction impaire, on voit que si x est dans le domaine de définition de f , alors $-x$ aussi et $f(-x) = -f(x)$. Pour $x \neq 0$, on voit bien que

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{1+t} dt = \frac{1}{x} \left(1 - \int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{(1+t)^2} dt \right), \quad (16)$$

où l'on a fait une intégration par parties avec $u(t) = 1/(1+t)$ et $v'(t) = \sin(xt)$ (i.e. $v(t) = -\cos(xt)/x$). Comme

$$\int_0^{+\infty} \frac{|\cos(xt)|}{(1+t)^2} dt \leq \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t)^2} dt = 1,$$

la dernière intégrale dans (16) converge (absolument), ce qui implique que l'intégrale qui définit f converge. En conséquence, le domaine de définition de f est \mathbb{R} . On définit l'application $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ via

$$g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{(1+t)^2} dt.$$

La majoration $|\cos(xt)|/(1+t)^2 \leq 1/(1+t)^2$ et le théorème de convergence dominée nous disent que g est continue sur \mathbb{R} . Cela implique que f est continue en tout $x \neq 0$. En plus, le théorème de Riemann-Lebesgue nous dit que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{1/x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{(1+t)^2} dt = 1,$$

i.e. $f \sim 1/x$ quand $x \rightarrow +\infty$.

Pour étudier le comportement de f autour de zéro, comme f est impaire, il suffit de considérer le cas $x > 0$. On fait d'abord la substitution $y = tx$ et une intégration par parties avec $u(y) = 1/(x+y)$ et $v'(y) = \sin(y)$ (on a choisi $v(y) = 1 - \cos(y)$), ce qui donne

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{1+t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(y)}{x+y} dy = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(y)}{(x+y)^2} dy.$$

Noter que l'intégrande de la dernière intégrale est une fonction non négative. En particulier $f(x) > 0$, pour tout $x > 0$. On affirme maintenant que la fonction non négative $(1 - \cos(y))/y^2$ est intégrable sur $\mathbb{R}_{\geq 0}$. En effet, comme la limite de $(1 - \cos(y))/y^2$ est 2 quand y tend vers zéro, l'intégrale $\int_0^{+\infty} (1 - \cos(y))/y^2 dy$ converge si et seulement si $\int_1^{+\infty} (1 - \cos(y))/y^2 dy$ converge. Or, l'inégalité $(1 - \cos(y))/y^2 \leq 2/y^2$ pour tout $y > 0$ et le fait que $y \mapsto 2/y^2$ est intégrable sur $\mathbb{R}_{\geq 1}$ nous disent que $\int_1^{+\infty} (1 - \cos(y))/y^2 dy$ converge. Or, on a l'inégalité $(1 - \cos(y))/(x+y)^2 \leq (1 - \cos(y))/y^2$, pour tout $y > 0$. Le théorème de convergence dominée implique que la limite suivante existe et

$$\lim_{x \rightarrow 0} \int_{\delta}^{+\infty} \frac{1 - \cos(y)}{(x+y)^2} dy = \int_{\delta}^{+\infty} \frac{1 - \cos(y)}{y^2} dy.$$

Comme $(1 - \cos(y))/y^2$ est une fonction continue, non négative et non nulle, son intégrale est strictement positive (en fait, on peut démontrer que cette intégrale vaut $\pi/2$). En conséquence, la limite ℓ de f en $0+$ est strictement positive. Comme $f(0) = 0$, on conclut que f n'est pas continue en zéro. \square

Exercice 83 On considère l'expression

$$f(x) = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{x+1} + t + 1} dt.$$

Calculer le domaine de définition de f (dans \mathbb{R}) et l'ensemble des points de continuité.

Proof. Comme $1/(t^{x+1} + t + 1) > 0$ pour tout $t \geq 1$, l'intégral définissant f converge si et seulement si elle est majorée. Si $x > 0$, alors

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{x+1} + t + 1} dt \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{x+1}} dt = \lim_{M \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{t^x} \right]_1^M = \frac{1}{x},$$

où l'on a utilisé que $t^{x+1} + t + 1 \geq t^{x+1}$. Si $x \leq 0$, alors $t^{x+1} + t + 1 \leq 3t$ nous dit que

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{x+1} + t + 1} dt \geq \int_1^{+\infty} \frac{1}{3t} dt.$$

Comme la dernière intégrale diverge (vers $+\infty$), alors $\int_1^{+\infty} 1/(t^{x+1} + t + 1) dt$ diverge aussi. En conséquence, le domaine de définition de f est $\mathbb{R}_{>0}$.

Pour $x_0 > 0$, soient $0 < a < b$ tels que $a < x_0 < b$. On voit bien que $1/(t^{x+1} + t + 1) \leq 1/(t^{a+1} + t + 1)$, qui est intégrable sur $\mathbb{R}_{\geq 1}$. Le théorème de convergence dominée nous dit que f est continue en x_0 . En conséquence, f est continue sur $\mathbb{R}_{>0}$. \square

Exercice 84 Soit $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2} dt.$$

1. Montrer que f est continue et différentiable sur $\mathbb{R}_{>0}$.
2. Calculer la limite de f en $+\infty$.
3. Trouver une équation différentielle (non triviale) vérifiée par f .
4. Montrer que f n'est pas différentiable en 0.

Proof.

1. On voit bien que $e^{-xt^2}/(1+t^2) \leq 1/(1+t^2)$, pour tous $x \geq 0$ et $t \geq 0$. Comme $1/(1+t^2)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_{\geq 0}$, le théorème de convergence dominée nous dit que f est continue sur \mathbb{R}_0 . En outre, comme la dérivée partielle suivante existe, est continue et

$$\left| \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{e^{-xt^2}}{1+t^2} \right) \right| = \left| -\frac{t^2 e^{-xt^2}}{1+t^2} \right| \leq e^{-xt^2},$$

le théorème de différentiation sous le signe de l'intégrale nous dit que f est dérivable sur $\mathbb{R}_{>0}$ et

$$f'(x) = - \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-xt^2}}{1+t^2} dt,$$

pour tout $x > 0$.

2. On voit bien que

$$0 \leq f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2} dt \leq \int_0^{+\infty} e^{-xt^2} dt = \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^{+\infty} e^{-s^2} ds = \frac{\pi}{2\sqrt{x}},$$

pour tout $x > 0$, où l'on a fait la substitution $s = \sqrt{xt}$. Cela implique que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

3. On voit bien que

$$f'(x) = - \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-xt^2}}{1+t^2} dt = - \int_0^{+\infty} e^{-xt^2} dt + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2} dt = -\frac{\pi}{2\sqrt{x}} + f(x),$$

pour tout $x > 0$, où l'on a utilisé le calcul dans l'item précédent pour la première intégrale dans l'avant-dernier membre.

4. C'est clair que

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt^2} - 1}{1 + t^2} dt = \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-s^2} - 1}{x + s^2} ds,$$

pour tout $x > 0$, où l'on a fait la substitution $s = \sqrt{xt}$. Comme $e^{-s^2} - 1 \leq 0$, pour tout $s > 0$, on voit que

$$\frac{|f(x) - f(0)|}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-s^2}}{x + s^2} ds \geq \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-s^2}}{1 + s^2} ds = \frac{1}{\sqrt{x}} (f(0) - f(1)),$$

si $x < 1$. Cela implique que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|f(x) - f(0)|}{x} = +\infty,$$

i.e. la dérivée (latérale à droite) de f en zéro n'existe pas.

□

Exercice 85 Soit I un intervalle de \mathbb{R} . On note E l'ensemble des fonctions continues sur l'intérieur de I à valeurs réelles. On note $\mathcal{L}^1(I)$ l'ensemble des fonctions de E telles que $\int_I |f(x)| dx$ soit convergente. On note $\mathcal{L}^2(I)$ l'ensemble des fonctions de E telles que $\int_I |f(x)|^2 dx$ soit convergente.

1. Montrer que $\mathcal{L}^1(I)$ est un sous-espace vectoriel de E . Pour $f \in \mathcal{L}^1(I)$, on pose $\|f\|_1 = \int_I |f(x)| dx$. Montrer que $\|\cdot\|_1$ est une norme sur $\mathcal{L}^1(I)$.
2. On suppose que $\|f_n - f\|_1 \rightarrow 0$. Est-ce que f_n converge simplement vers f ?
3. On suppose que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de E qui converge simplement vers f . Est-ce que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers f pour la norme $\|\cdot\|_1$?
4. Montrer que si $f, g \in \mathcal{L}^2(I)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $f + \lambda g \in \mathcal{L}^2(I)$ et $fg \in \mathcal{L}^1(I)$. En déduire que l'application donnée par $(f, g) \mapsto \int_I f(x)g(x) dx$ est un produit scalaire sur $\mathcal{L}^2(I)$.
5. $(\mathcal{L}^2(I), \|\cdot\|_2)$ est-il un espace de Hilbert ?
6. Calculer

$$\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^{+\infty} (x^2 - ax - b)^2 e^{-2x} dx.$$

7. Les espaces $\mathcal{L}^1(I)$ et $\mathcal{L}^2(I)$ sont-ils comparables (au sens de l'inclusion) ?
8. Sur $\mathcal{L}^1(I) \cap \mathcal{L}^2(I)$, les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sont-elles équivalentes ?

Proof.

1. Il s'agit d'un résultat du cours.
2. Non. Considérer par exemple $I = [0, 1]$ et la suite de fonctions suivante. Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = \begin{cases} 2^{n+1}(x - (2^n - 1)/2^{n+1}), & \text{si } x \in [(2^n - 1)/2^{n+1}, 1/2], \\ -2^{n+1}(x - (2^n + 1)/2^{n+1}), & \text{si } x \in [1/2, (2^n + 1)/2^{n+1}], \\ 0, & \text{si } x \in [0, (2^n - 1)/2^{n+1}] \cup [(2^n + 1)/2^{n+1}, 1]. \end{cases}$$

C'est clair que f_n est continue et $\int_0^1 f_n(x)dx = 1/2^{n+1}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $(\|f_n\|_1)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers zéro, mais $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas vers la fonction nulle, puisque $f_n(1/2) = 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. Non. La suite de fonctions dans l'exercice 8.2 est un contre-exemple.
4. C'est clair que si $f \in \mathcal{L}^2(I)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\lambda f \in \mathcal{L}^2(I)$. Par ailleurs, l'inégalité $((a+b)/2)^2 \leq (a^2+b^2)/2$, pour tous $a, b \geq 0$ nous dit que $f+g \in \mathcal{L}^2(I)$, si $f, g \in \mathcal{L}^2(I)$. Par ailleurs, $ab \leq (a^2+b^2)/2$, pour tous $a, b \geq 0$, nous dit que $fg \in \mathcal{L}^1(I)$, si $f, g \in \mathcal{L}^2(I)$. Le fait que $(f, g) \mapsto \int_I f(x)g(x)dx$ est une forme bilinéaire symétrique sur $\mathcal{L}^2(I)$ est trivial. En plus, si $\|f\|_2 = 0$, alors la restriction $f|_{I^\circ}$ est la fonction nulle.
5. L'espace $(\mathcal{L}^2(I), \|\cdot\|_2)$ n'est pas complet. En effet, la suite $(S_{n,g})_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par

$$S_{n,g} = \sum_{k=1}^n \frac{\sin(kx)}{k}$$

dans l'exercice 7 de la fiche 4 donne une suite de Cauchy dans l'espace $\mathcal{L}^2([-\pi, \pi])$. Par contre, la limite de $(S_{n,g})$ dans $(\mathcal{L}^2([-\pi, \pi]), \|\cdot\|_2)$ est la fonction non continue g de l'exercice mentionné.

6. On voit bien que

$$\begin{aligned} \inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^{+\infty} (x^2 - ax - b)^2 e^{-2x} dx &= \left[\frac{e^{-2x}}{4} \left((-a^2 + 2b)(2x^2 + 2x + 1) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 2b^2 + a(4x^3 + 6x^2 + 6x + 3) - 2ab(2x + 1) - 2x^4 - 4x^3 - 6x^2 - 6x - 3 \right) \right]_0^{+\infty} \\ &= \frac{a^2 + 2b^2 + 2ab - 3a - 2b + 3}{4} \end{aligned} \tag{17}$$

Le seul point critique de cette fonction est $(a, b) = (2, -1/2)$, qui est un minimum local strict (d'après le critère de la matrice hessienne). Comme la fonction (20) est coercive, ce qui suit directement de la dernière expression, le minimum local est aussi un minimum global.

7. Si I est une intervalle fini, $\mathcal{L}^2(I) \subseteq \mathcal{L}^1(I)$. En effet, comme la fonction constante $\mathcal{K}_I \in \mathcal{L}^2(I)$, si $f \in \mathcal{L}^2(I)$, l'item (d) implique que $f = f \cdot \mathcal{K}_I \in \mathcal{L}^1(I)$. En plus, cela nous dit aussi que $\|f\|_1 \leq \|\mathcal{K}_I\|_2 \|f\|_2$, pour tout $f \in \mathcal{L}^2(I)$. Par contre, l'inclusion $\mathcal{L}^1(I) \subseteq \mathcal{L}^2(I)$ n'est pas vérifiée en général. Par exemple, si $I =]0, 1]$, pour la fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par $t \mapsto 1/\sqrt{t}$ on voit que $f \notin \mathcal{L}^2(I)$ mais $f \in \mathcal{L}^1(I)$. En outre, si I est un intervalle infini, l'inclusion $\mathcal{L}^2(I) \subseteq \mathcal{L}^1(I)$ n'est pas vraie en général. Par exemple, si $I = \mathbb{R}_{>1}$, on voit que la fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par $t \mapsto 1/t^{3/4}$ satisfait que $f \in \mathcal{L}^2(I)$ mais $f \notin \mathcal{L}^1(I)$.
8. Non. Considérer par exemple $I = [0, 1]$ et la suite de fonctions suivante. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ via $f_n(x) = (n+1)x^n$. C'est clair que $f_n \in \mathcal{L}^1(I) \cap \mathcal{L}^2(I)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors, $\|f_n\|_1 = 1$, mais $\|f_n\|_2 = (n+1)/\sqrt{2n+1}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

□

5 Séries de Fourier

Exercice 86 *La série de Fourier* Soit \mathbb{E} l'espace vectoriel des fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ continues par morceaux, périodiques de période 2π . On définit l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{E} \times \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{C}$ par

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx.$$

1. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est une forme hermitienne positive sur \mathbb{E} . Est-elle définie positive ?
2. Soit $\{\chi_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \in \mathbb{E}^{\mathbb{Z}}$ la collection de fonctions donnée par $\chi_n(x) = e^{inx}$. Montrer que

$$\langle \chi_n, \chi_m \rangle = 2\pi \delta_{n,m},$$

pour tous $n, m \in \mathbb{Z}$, où $\delta_{n,m} = 1$ si $n = m$ et 0 si $n \neq m$. Pour $n \in \mathbb{Z}$, on définit les *coefficients de Fourier exponentiels*

$$c_n(f) = \frac{\langle f, \chi_n \rangle}{\langle \chi_n, \chi_n \rangle} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx. \quad (\text{FE})$$

On écrira c_n si la fonction f est sous-entendue.

3. Soit $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \in \mathbb{E}^{\mathbb{Z}}$ la collection de fonctions donnée par $\varphi_n(x) = \cos(nx)$ si $n \in \mathbb{N}^*$, $\varphi_0(x) = 1$ et $\varphi_{-n}(x) = \psi_n(x) = \sin(nx)$ si $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$\langle \varphi_0, \varphi_0 \rangle = 2\langle \varphi_n, \varphi_n \rangle = 2\pi \text{ et } \langle \varphi_m, \varphi_{m'} \rangle = 0,$$

pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$ et tous $m, m' \in \mathbb{Z}$ tels que $m \neq m'$. On définit les *coefficients de Fourier trigonométriques*

$$\begin{aligned} a_n(f) &= \frac{\langle f, \varphi_n \rangle}{\langle \varphi_n, \varphi_n \rangle} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx, \\ a_0(f) &= \frac{\langle f, \varphi_0 \rangle}{\langle \varphi_0, \varphi_0 \rangle} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \\ b_n(f) &= \frac{\langle f, \varphi_{-n} \rangle}{\langle \varphi_{-n}, \varphi_{-n} \rangle} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx, \end{aligned} \quad (\text{FT})$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On écrira plus simplement a_n ou b_n si la fonction f est sous-entendue.

4. Montrer que $\varphi_0 = \chi_0$, $\chi_n + \chi_{-n} = 2\varphi_n$, $\chi_n - \chi_{-n} = 2i\varphi_{-n}$ et $\varphi_n + i\varphi_{-n} = \chi_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. En déduire une relation entre (FE) et (FT). En particulier, montrer que

$$S_{f,n}(x) = a_0(f) + \sum_{k=1}^n (a_k(f) \cos(kx) + b_k(f) \sin(kx)) = \sum_{k=-n}^n c_k(f) e^{ikx}, \quad (\text{F})$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. On appelle (F) la *série de Fourier partielle d'ordre n*.

5. Montrer que si $f|_{]-\pi, \pi[}$ est une fonction paire (resp., impaire), alors $b_n(f) = 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ (resp., $a_n(f) = 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$).

Proof. Il s'agit des résultats du cours, même si la solution suit directement des indications détaillées dans l'exercice. \square

Exercice 87 *Les bases de Fourier sont totales*

1. Pour $f, g \in \mathbb{E}$, on définit $f * g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ par

$$(f * g)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(x-t)dt.$$

Montrer que $f * g \in \mathbb{E}$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la fonction continue et périodique de période 2π donnée par

$$D_n = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-m}^m \chi_k.$$

(i) Montrer que $D_n * f = S_{f,n}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Montrer que

$$D_n(x) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin((2n+1)x/2)}{\sin(x/2)},$$

pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$.

(iii) Montrer que

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_n(x)dx = 1,$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la fonction continue et périodique de période 2π donnée par

$$K_n = \frac{1}{2\pi n} \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{k=-m}^m \chi_k.$$

(i) Montrer que

$$K_n * f = \frac{\sum_{m=0}^{n-1} S_{f,m}}{n}.$$

(ii) Montrer que

$$K_n(x) = \frac{1}{2\pi n} \frac{\sin^2(nx/2)}{\sin^2(x/2)},$$

pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$. En déduire que $K_n(x) \geq 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

(iii) Montrer que

$$\int_{-\pi}^{\pi} K_n(x)dx = 1,$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(iv) Montrer que, étant donné $\epsilon > 0$ et $0 < \delta < \pi$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\int_{-\pi}^{-\delta} K_n(x)dx + \int_{\delta}^{\pi} K_n(x)dx < \epsilon,$$

pour tout $n \geq N$.

4. Soit $f \in \mathbb{E}$ et soit $X \subseteq \mathbb{R}$ une partie compacte telle que $f|_X$ soit continue. À partir des items précédents, conclure que $K_n * f$ converge uniformément vers f sur X . En déduire que l'espace vectoriel engendré par $\{\chi_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \in \mathbb{E}^{\mathbb{Z}}$ (ou par $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \in \mathbb{E}^{\mathbb{Z}}$) est dense dans \mathbb{E} muni de la semi-norme $\| \cdot \|_2$ associée à $\langle \cdot, \cdot \rangle$.
5. Utiliser l'item précédent et le théorème de Bessel pour montrer que, si $f \in \mathbb{E}$ satisfait que $c_n(f) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, alors il existe $F \subseteq]-\pi, \pi[$ fini tel que $f|_{]-\pi, \pi[\setminus F}$ est la fonction nulle.

Proof. Il s'agit des résultats du cours, même si la solution suit directement des indications détaillées dans l'exercice. \square

Exercice 88 Pour chaque item ci-dessous, on considérera la fonction $f \in \mathbb{E}$ dont la restriction de f à $[-\pi, \pi[$ coïncide avec l'expression indiquée :

(a) x , (b) x^2 , (c) $|x|$, (d) $\sin^2(x)$, (e) $|\sin(x)|$.

Calculer les coefficients de Fourier trigonométriques respectifs.

Proof.

1. Comme x est une fonction impaire, alors $a_n = 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. En outre, c'est facile à calculer

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin(nx) dx = \left[\frac{\sin(nx) - nx \cos(nx)}{\pi n^2} \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{2(-1)^{n+1}}{n},$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

2. Comme x^2 est une fonction paire, alors $b_n = 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. En outre, c'est facile à calculer

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \left[\frac{x^3}{6\pi} \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{\pi^2}{3}$$

et

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cos(nx) dx = \left[\frac{(n^2 x^2 - 2) \sin(nx) + 2nx \cos(nx)}{\pi n^3} \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{4(-1)^n}{n^2},$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

3. Comme $|x|$ est une fonction paire, alors $b_n = 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. En outre, c'est facile à calculer

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \left[\frac{x^2}{2\pi} \right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}$$

et

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| \cos(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos(nx) dx = 2 \left[\frac{nx \sin(nx) + \cos(nx)}{\pi n^2} \right]_0^{\pi} \\ &= \frac{2((-1)^n - 1)}{\pi n^2}, \end{aligned}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

4. Comme $\sin^2(x)$ est une fonction paire, alors $b_n = 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. En outre, c'est facile à calculer

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(x) dx = \left[\frac{x}{4\pi} - \frac{\sin(2x)}{8\pi} \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2}.$$

En plus,

$$a_2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(x) \cos(2x) dx = \left[-\frac{x}{4\pi} + \frac{4 \sin(2x) - \sin(4x)}{16\pi} \right]_{-\pi}^{\pi} = -\frac{1}{2},$$

tandis que

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(x) \cos(nx) dx = \left[\frac{\sin(nx)}{2n\pi} - \frac{\sin((n-2)x)}{4(n-2)\pi} - \frac{\sin((n+2)x)}{4(n+2)\pi} \right]_{-\pi}^{\pi} = 0,$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{2\}$.

5. Comme $|\sin(x)|$ est une fonction paire, alors $b_n = 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. En outre, c'est facile à calculer

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\sin(x)| dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(x) dx = \left[-\cos(x) \right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}.$$

En plus,

$$a_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\sin(x)| \cos(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(x) \cos(x) dx = \left[\frac{\sin(2x)}{\pi} \right]_0^{\pi} = 0,$$

tandis que

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\sin(x)| \cos(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(x) \cos(nx) dx \\ &= 2 \left[\frac{n \sin(x) \sin(nx) + \cos(x) \cos(nx)}{\pi(n^2 - 1)} \right]_0^{\pi} = 2 \frac{1 + (-1)^n}{\pi(1 - n^2)}, \end{aligned}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$.

□

Exercice 89

1. Soit $f \in \mathbb{E}$ de classe C^1 . Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $|c_n(f)| \leq C/|n|$, pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$.
2. Soit $f \in \mathbb{E}$ de classe C^2 . Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $|c_n(f)| \leq C/n^2$, pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$.
3. Soit $f \in \mathbb{E}$ telle que la série de Fourier $S_{f,n}$ converge uniformément. Utiliser l'exercice 5 pour montrer que la limite uniforme de $S_{f,n}$ est f .
4. Soit $f \in \mathbb{E}$ qui satisfait qu'il existe $C > 0$ telle que $|c_n(f)| \leq C/n^2$, pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$. Montrer que la série de Fourier de f converge uniformément vers f . En déduire que la série de Fourier de f converge uniformément vers f si f est de classe C^2 .

Proof.

1. Soit $n \in \mathbb{Z}^*$. On voit que

$$\begin{aligned} c_n(f) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx = \left[\frac{f(x) e^{-inx}}{-in} \right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2ni\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) e^{-inx} dx \\ &= \frac{1}{2ni\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) e^{-inx} dx, \end{aligned}$$

où l'on a fait une intégration par parties et on a utilisé que f est continue. Soit $C > 0$ telle que $|f'(x)| < C$, pour tout $x \in [-\pi, \pi]$. Alors, $|c_n(f)| \leq C/|n|$, comme on voulait démontrer.

2. Il s'agit du même type d'argument que celui dans l'item précédent, mais il faut appliquer deux fois la méthode d'intégration par parties.
3. Soit $f \in \mathbb{E}$ telle que la série de Fourier $S_{f,n}$ converge uniformément et soit S_f la limite uniforme. En particulier, S_f est une fonction continue. Pour tout $m \in \mathbb{Z}$ on voit bien que

$$\begin{aligned} c_m(S_f) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_f(x) e^{-imx} dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_{f,m}(x) e^{-imx} dx \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{p=-n}^n \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} c_p(f) e^{i(p-m)x} dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} c_m(f) = c_m(f). \end{aligned}$$

D'après le dernier item de l'exercice 5, on voit que, comme f et S_f ont la même série de Fourier, alors $f = S_f$.

4. On suppose qu'il existe $C > 0$ telle que $|c_n(f)| \leq C/n^2$, pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$. Alors

$$\left| \sum_{m=-n}^n c_m(f) e^{imx} \right| \leq \sum_{m=-n}^n |c_m(f)| |e^{imx}| \leq |c_0(f)| + 2C \sum_{m=1}^n \frac{1}{n^2}.$$

D'après le critère de Weierstrass la série de Fourier converge absolument et uniformément. L'item précédent nous dit que la limite uniforme de la série est f . D'après le troisième item de cet exercice, on conclut que la série de Fourier de f converge uniformément vers f si f est de classe C^2 .

□

Exercice 90 *Lemme de Riemann-Lebesgue* Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction intégrable et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On pose

$$I(\lambda) = \int_a^b f(x) e^{i\lambda x} dx.$$

1. On suppose maintenant que f est de classe C^1 . Montrer que

$$\int_a^b f(x) e^{i\lambda x} dx = \frac{f(b) e^{i\lambda b}}{i\lambda} - \frac{f(a) e^{i\lambda a}}{i\lambda} - \frac{1}{i\lambda} \int_a^b f'(x) e^{i\lambda x} dx. \quad (18)$$

En déduire que $\lambda \mapsto \lambda I(\lambda)$ est bornée et, en particulier, $I(\lambda)$ tend vers 0 quand λ tend vers $+\infty$. En déduire les mêmes résultats pour f de classe C^1 par morceaux.

2. En déduire le *Lemme de Riemann-Lebesgue* : pour toute fonction f intégrable,

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} I(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) e^{i\lambda x} dx = 0. \quad (\text{RL})$$

3. On suppose f décroissante et positive, montrer que $\lambda \mapsto \lambda I(\lambda)$ est bornée.

4. Soit $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction périodique de période $\ell > 0$ telle que $F|_{[0, \ell]}$ soit intégrable et soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction de classe C^1 . Montrer que pour tout $\epsilon > 0$ il existe $C > 0$ tel que

$$\left| \int_a^b F(x+t) f(t) e^{i\lambda t} dt \right| < \epsilon, \quad (\text{RL-U})$$

pour tout $\lambda > C$ et tout $x \in \mathbb{R}$.

Indication : réduire d'abord au cas où F satisfait que $F|_{[0, \ell]}$ est en escalier à partir de prendre une approximation uniforme de F , puis démontrer le cas des fonctions en escalier à partir de (18).

Proof. Il s'agit des résultats du cours, même si la solution suit directement des indications détaillées dans l'exercice. □

Exercice 91 *Convergence uniforme locale* Soit $f \in \mathbb{E}$.

1. Montrer que les limites

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} f(x+h) \text{ et } \lim_{h \rightarrow 0^-} f(x+h)$$

existent. On les note $f(x+)$ et $f(x-)$, respectivement. On pose $\text{Av}_f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ via $\text{Av}_f(x) = (f(x+) + f(x-))/2$. Montrer que $\text{Av}_f \in \mathbb{E}$.

2. Soit $X \subseteq \mathbb{R}$. On dit que f satisfait la *condition de Lipschitz à gauche* (resp., à droite) sur X s'il existe $C > 0$ et $\delta > 0$ tels que $|f(x-h) - f(x-)| \leq Ch$ (resp., $|f(x+h) - f(x+)| \leq Ch$), pour tous $x \in X$ et $h \in]0, \delta]$. Montrer que si X est un point x et $f \in \mathbb{E}$ est différentiable à gauche (resp., à droite) en x , alors elle satisfait la condition de Lipschitz à gauche (resp., à droite) sur X .
3. Utiliser que D_n est paire pour montrer que

$$\int_{-\delta}^{\delta} (f(x-t) - \text{Av}_f(x)) D_n(t) dt = \int_{-\delta}^{\delta} \left(\frac{f(x-t) + f(x+t)}{2} - \text{Av}_f(x) \right) D_n(t) dt$$

et en déduire que, si f satisfait la condition de Lipschitz (à gauche et à droite) sur X , alors il existe $\delta, C, C' > 0$ tels que

$$\left| \int_{-\delta}^{\delta} (f(x-t) - \text{Av}_f(x)) D_n(t) dt \right| \leq C \int_{-\delta}^{\delta} \frac{|t/2|}{|\sin(t/2)|} dt \leq \delta C',$$

pour tout $x \in X$.

4. On continue avec les hypothèses de l'item précédent. Montrer que le lemme de Riemann-Lebesgue uniforme (RL-U) implique que

$$\int_{-\pi}^{-\delta} (f(x-t) - \text{Av}_f(x)) D_n(t) dt \text{ et } \int_{\delta}^{\pi} (f(x-t) - \text{Av}_f(x)) D_n(t) dt$$

convergent vers 0 quand n tend vers $+\infty$ uniformément pour $x \in X$.

5. En déduire que si $f \in \mathbb{E}$ satisfait la condition de Lipschitz (à gauche et à droite) sur X , alors $S_{n,f} = D_n * f$ converge uniformément vers Av_f sur X .
6. En déduire le *principe de localisation de Riemann* : si $f \in \mathbb{E}$ satisfait que $f|_{[a,b]}$ est nulle, alors $S_{f,n}$ converge uniformément vers 0 sur tout sous-intervalle fermé de $]a, b[$.

Proof. Il s'agit des résultats du cours, même si la solution suit directement des indications détaillées dans l'exercice. \square

Exercice 92 Soient $f, g \in \mathbb{E}$ les fonctions qui satisfont que $f|_{[0,2\pi[}$ coïncide avec $(\pi-x)^2/4$ et $g|_{[0,2\pi[}$ coïncide avec $(\pi-x)/2$

1. Montrer que les séries de Fourier trigonométriques de f et de g sont

$$\frac{\pi^2}{12} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k^2} \text{ et } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k},$$

respectivement.

2. Montrer que la série de Fourier trigonométrique de f converge uniformément vers f .
3. Montrer que l'on peut différentier la série de Fourier trigonométrique de f terme à terme sur tout intervalle de la forme $[\delta, 2\pi - \delta]$, avec $0 < \delta < \pi$, et

$$\frac{\pi - x}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k},$$

pour tout $x \in]0, 2\pi[$.

Proof. La solution suit directement des indications détaillées dans l'exercice. \square

Exercice 93 Soit $f \in \mathbb{E}$ la fonction qui satisfait que $f|_{]0, 2\pi[}$ coïncide avec e^{ax} , où $a \in \mathbb{C} \setminus i\mathbb{Z}$.

1. Calculer la série de Fourier exponentielle de f .
2. Soit $x \in]0, 2\pi[$. Montrer que

$$\pi e^{ax} = (e^{2a\pi} - 1) \left(\frac{1}{2a} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a \cos(kx) - k \sin(kx)}{k^2 + a^2} \right).$$

3. Soit $x \in]0, 2\pi[$ et $b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Montrer que

$$\pi \cos(bx) = \frac{\sin(2b\pi)}{2b} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{b \sin(2b\pi) \cos(kx) + k(\cos(2b\pi) - 1) \sin(kx)}{b^2 - k^2}.$$

En déduire que

$$\frac{b\pi}{\sin(b\pi)} = 1 + 2b^2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{b^2 - k^2}.$$

Proof. La solution suit directement des indications détaillées dans l'exercice. \square

Exercice 94 *Le phénomène de Gibbs*

1. Soit $g \in \mathbb{E}$ la fonction de l'exercice 5 et soit $\Delta_n :]0, \pi[\rightarrow \mathbb{R}$ la fonction donnée par $\Delta_n(x) = S_{g,n}(x) - g(x)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $S_{g,n}(0)$ converge vers $\text{Av}_g(0) = 0$ quand n tend vers $+\infty$.
2. Montrer que Δ_n est différentiable et

$$\Delta'_n(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(kx) = \frac{\sin((2n+1)x/2)}{2 \sin(x/2)},$$

pour tout $x \in]0, \pi[$. Conclure que les points critiques de Δ_n sont de la forme $x_{n,j} = j\pi/(n+1/2)$, pour $j \in \{1, \dots, n\}$. Noter que $x_{n,j}$ converge vers $0+$ quand n tend vers $+\infty$.

3. Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_{g,n}(x_{n,j}) = \int_0^{j\pi} \frac{\sin(x)}{x} dx.$$

En déduire que

$$b_j = \lim_{n \rightarrow +\infty} \Delta_n(x_{n,j}) = \int_0^{j\pi} \frac{\sin(x)}{x} dx - \frac{\pi}{2}.$$

Indication : Considérer une somme de Riemann de $\sin(x)/x$ sur l'intervalle $[0, j\pi]$ associée à la subdivision $\{kj\pi/(n+1/2) : k \in \{1, \dots, n\}\}$.

4. Montrer que la suite $(b_j)_{j \in \mathbb{N}}$ est alternée et que $(|b_j|)_{j \in \mathbb{N}}$ est strictement décroissante (de limite 0). En conséquence, la valeur $b_1 \simeq 0,281$ est maximale.
5. Soit $f \in \mathbb{E}$ de classe C^1 par morceaux et soit $\{y_1, \dots, y_n\} \subseteq [0, 2\pi[$ l'ensemble de discontinuités de saut de $f|_{]0, 2\pi[}$. On pose $d_i = (f(y_i+) - f(y_i-))/\pi$ et $\tilde{f}(x) = f(x) - \sum_{i=1}^n d_i g(x - y_i)$, pour $x \in \mathbb{R}$. Noter que, comme \tilde{f} est de classe C^1 par morceaux

et continue, $S_{\tilde{f},n}$ converge uniformément vers \tilde{f} . Utiliser le principe de localisation de Riemann ainsi que les items précédents pour montrer qu'il existe une suite $(x_{n,i})_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge vers y_i+ telle que la limite de $|S_{f,n}(x_{n,i}) - f(y_i+)|$ quand n tend vers $+\infty$ est $b_1 d_i$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$.

Proof. La solution suit directement des indications détaillées dans l'exercice. \square

On dit que g satisfait le *phénomène de Gibbs à droite* (resp., à gauche) en x_0 s'il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $x_n > x_0$ (resp., $x_n < x_0$) pour tout $n \in \mathbb{N}$ et

$$\operatorname{sgn}(d) \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} S_{g,n}(x_n) - g(x_0+) \right) > 0 \quad \left(\text{resp.}, \operatorname{sgn}(d) \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} S_{g,n}(x_n) - g(x_0-) \right) < 0 \right).$$

Un résultat remarquable de la théorie de Fourier est que toute fonction $g \in \mathbb{E}$ de classe C^1 par morceaux satisfait le phénomène de Gibbs (à droite et à gauche) en toute discontinuité de saut.

6 Intégrales curvilignes

Exercice 95 Donner la longueur de la courbe $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ donnée par

$$\alpha(t) = \left(a(2 \cos(t) - \cos(2t)), a(2 \sin(t) - \sin(2t)) \right),$$

où $a > 0$.

Proof. C'est clair que α est périodique de période 2π , puisque les fonctions \sin et \cos sont périodiques de période 2π . En outre, on affirme que la période minimale $p > 0$ de α est 2π . En effet, si P est une période de α , alors P est aussi une période de la fonction $t \mapsto \|\alpha(t)\|^2$ définie sur \mathbb{R} . Comme

$$\|\alpha(t)\|^2 = a(5 - 4 \cos(t)),$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$, on voit que P doit être un multiple entier de 2π . Cela implique que la longueur de la courbe définie par α est

$$\ell = \int_0^{2\pi} \|\alpha'(t)\| dt = \int_0^{2\pi} 2\sqrt{2}a\sqrt{1 - \cos(t)} dt = \int_0^{2\pi} 4a|\sin(t/2)| dt = 4^2 a,$$

où $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne et l'on a utilisé les identités

$$\cos(2t) \cos(t) + \sin(2t) \sin(t) = \cos(t) \text{ et } 1 - \cos(t) = 2 \sin^2(t/2).$$

□

Exercice 96 Soient $a, b > 0$. Calculer la longueur de l'arc de la chaînette $y = a \cosh(x/a)$ compris entre le sommet $(0, a)$ et le point (b, h) , où $h = a \cosh(b/a)$.

Proof. La courbe indiquée est donnée par $\alpha(t) = (t, a \cosh(t/a))$. On voit bien que la longueur demandée est

$$\begin{aligned} \ell &= \int_0^b \|\alpha'(t)\| dt = \int_0^b \sqrt{1 + \sinh^2(t/a)} dt = \int_0^b \cosh(t/a) dt \\ &= \left[a \sinh(t/a) \right]_0^b = a \sinh(b/a), \end{aligned}$$

où $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne. □

Exercice 97 Calculer la longueur de la cardioïde décrite en polaires par $r = a(1 + \cos(\theta))$, où $a > 0$.

Proof. C'est clair que la courbe indiquée $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ est donnée par $\alpha(\theta) = (a(1 + \cos(\theta)) \cos(\theta), a(1 + \cos(\theta)) \sin(\theta))$. C'est clair que α est périodique de période 2π , puisque les fonctions \sin et \cos sont périodiques de période 2π . En outre, vu que $(2a, 0) = \alpha(0) \neq \alpha(\pi) = (0, 0)$, la période minimale de α est 2π . On voit bien que la longueur demandée est

$$\ell = \int_0^{2\pi} \|\alpha'(t)\| dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2}a\sqrt{1 + \cos(t)} dt = \int_0^{2\pi} 2a|\cos(t/2)| dt = 8a,$$

où $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne et l'on a utilisé les identités

$$\cos(2t) \cos(t) + \sin(2t) \sin(t) = \cos(t) \text{ et } 1 + \cos(t) = 2 \cos^2(t/2).$$

□

Exercice 98 Soient A et B deux points de \mathbb{R}^2 tels que la distance entre A et B est $a > 0$. Sans perte de généralité on considère que $A = (0, 0)$ et $B = (a, 0)$. Soit $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée du plan de classe C^1 telle que $\varphi(0) = A$ et $\varphi(1) = B$. On note ℓ la longueur de la courbe paramétrée par φ .

1. Rappeler la formule permettant de calculer ℓ .
2. Montrer que $\ell \geq a$. Est-ce étonnant ?
3. Montrer que $\ell = a$ si et seulement s'il existe une fonction $x : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ monotone telle que $\varphi(t) = (x(t), 0)$, pour tout $t \in [0, 1]$.

Proof.

1. On rappelle que

$$\ell = \int_0^1 \|\varphi'(t)\| dt,$$

où $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne.

2. On écrit $\varphi(t) = (x(t), y(t))$. Alors $\|\varphi'(t)\| = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} \geq \sqrt{x'(t)^2} = |x'(t)|$. Cela implique que

$$\ell = \int_0^1 \|\varphi'(t)\| dt \geq \int_0^1 |x'(t)| dt \geq \left| \int_0^1 x'(t) dt \right| = |x(1) - x(0)| = a.$$

3. On suppose qu'il existe une fonction $x : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ monotone telle que $\varphi(t) = (x(t), 0)$, pour tout $t \in [0, 1]$. Comme $x(1) = a > x(0) = 0$, x est croissante et sa dérivée est donc non négative. Alors,

$$\ell = \int_0^1 \|\varphi'(t)\| dt = \int_0^1 |x'(t)| dt = \int_0^1 x'(t) dt = x(1) - x(0) = a.$$

Réciproquement, on suppose que $\ell = a$. Cela implique que

$$\int_0^1 (\|\varphi'(t)\| - |x'(t)|) dt = 0.$$

Comme $t \mapsto \|\varphi'(t)\| - |x'(t)|$ est une fonction continue, non négative et son intégrale est nulle, on conclut qu'elle est la fonction nulle. Cela implique que $y'(t) = 0$, pour tout $t \in]0, 1[$. Comme $y(0) = 0$, on conclut que $y(t) = 0$, pour tout $t \in [0, 1]$, *i.e.* $\varphi(t) = (x(t), 0)$, pour tout $t \in [0, 1]$. En outre, la condition $\ell = a$ implique que

$$\int_0^1 |x'(t)| dt \geq \left| \int_0^1 x'(t) dt \right|,$$

ce qui dit en particulier que la dérivée de x est toujours non négative sur $]0, 1[$ ou toujours non positive sur $]0, 1[$. Comme $x(1) = a > 0 = x(0)$, on conclut que x est croissante.

□

Exercice 99 On va s'intéresser aux courbes de longueur minimale tracées sur la sphère

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

de rayon 1 et de centre $O = (0, 0, 0)$. On appelle *grand cercle* de la sphère toute intersection de la sphère avec un plan passant par O .

Soient A et B deux points de S^2 . Sans perte de généralité, on considère que $A = (0, 0, 1)$ et $B = (\sin(\psi_0), 0, \cos(\psi_0))$, avec $0 \leq \psi_0 \leq \pi$.

On considère une courbe tracée sur la sphère $M : [0, 1] \rightarrow S^2$ donnée par

$$t \mapsto (\cos(\theta(t)) \sin(\psi(t)), \sin(\theta(t)) \sin(\psi(t)), \cos(\psi(t)))$$

telle que les fonctions θ et ψ soient de classe C^1 , $\theta(0) = 0$, $\psi(0) = 0$, $\theta(1) = 0$ et $\psi(1) = \psi_0$. On a donc $M(0) = A$ et $M(1) = B$. On note ℓ la longueur de la courbe paramétrée précédente.

1. Montrer que

$$\ell = \int_0^1 \sqrt{(\theta'(t))^2 \sin^2(\psi(t)) + (\psi'(t))^2} dt.$$

2. En déduire que la longueur de ℓ est plus grande que la longueur de l'arc de cercle du grand cercle tracé sur la sphère reliant A à B .
3. En déduire que pour tous points A, B sur la sphère, le chemin sur la sphère le plus court reliant A à B est donné par l'arc de cercle reliant A à B d'un grand cercle de la sphère.

Proof.

1. La formule de la longueur ℓ est un calcul directe.
2. C'est clair que

$$\ell = \int_0^1 \sqrt{(\theta'(t))^2 \sin^2(\psi(t)) + (\psi'(t))^2} dt \geq \int_0^1 \sqrt{(\psi'(t))^2} dt = \psi_0,$$

qui est la longueur de l'arc de cercle du grand cercle tracé sur la sphère reliant A à B .

3. On remarque que, étant donnés deux points A et B sur la sphère, on peut toujours faire une rotation du repère de coordonnées pour tomber sur la situation décrite dans l'énoncé pour A et B . La question est alors une conséquence directe de l'item précédent.

□

7 Intégrales doubles

Exercice 100 Calculer les intégrales doubles

$$I = \iint_D \frac{(x+y)^2}{x^2+y^2+1} dx dy \quad \text{et} \quad J = \iint_{\Delta} (x^2+y^2) dx dy,$$

où $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ et $\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$.

Proof. On voit bien que

$$\begin{aligned} I &= \iint_D \frac{(x+y)^2}{x^2+y^2+1} dx dy = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{r^3 + r^2 \sin(2\theta)}{r^2+1} d\theta dr \\ &= 2\pi \int_0^1 \frac{r^3}{r^2+1} dr + \int_0^1 \frac{r}{r^2+1} dr \underbrace{\left[-\frac{\cos(2\theta)}{2} \right]_0^{2\pi}}_{=0} \\ &= 2\pi \left[\frac{r^2}{2} - \frac{\ln(1+r^2)}{2} \right]_0^1 = \pi(1 - \ln(2)), \end{aligned}$$

et

$$J = \iint_{\Delta} (x^2+y^2) dx dy = \int_0^1 \int_0^{\pi/2} r^3 d\theta dr = \frac{\pi}{2} \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^1 = \frac{\pi}{8},$$

où l'on a fait le changement de variables des coordonnées polaires. \square

Exercice 101 Soit $T \subseteq \mathbb{R}^2$ le triangle ayant pour sommets les points de coordonnées $(0, 0)$, $(1, 0)$ et $(0, 1)$. Montrer que

$$\iint_T e^{\frac{x-y}{x+y}} dx dy = \frac{1}{2} \sinh(1).$$

Proof. On considère le changement de variables $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ donné par

$$F(u, v) = \left(\frac{u+v}{2}, \frac{v-u}{2} \right).$$

C'est clair que F est bijectif, de classe C^1 avec réciproque de classe C^1 . En plus, le déterminant de la matrice jacobienne de F est $1/2$. Soit $D = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : v \in [0, 1], |u| \leq v\}$. On voit bien aussi que $F(D) = T$. En conséquence,

$$\begin{aligned} \iint_T e^{\frac{x-y}{x+y}} dx dy &= \frac{1}{2} \iint_D e^{u/v} du dv = \frac{1}{2} \int_0^1 \int_{-v}^v e^{u/v} du dv = \frac{1}{2} \int_0^1 \left[v e^{u/v} \right]_{-v}^v dv \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left[v e^{u/v} \right]_{-v}^v dv = \sinh(1) \int_0^1 v dv = \frac{\sinh(1)}{2}. \end{aligned}$$

\square

Exercice 102 Montrer que l'aire de la région bornée R comprise entre la droite $y = x$ et la parabole $y^2 = 2x$ vaut $2/3$.

Proof. La région demandée est décrite par

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, 2], x \leq y \leq \sqrt{2x}\}.$$

L'aire demandée est donnée par l'intégrale

$$\iint_R dx dy = \int_0^2 \int_x^{\sqrt{2x}} dy dx = \int_0^2 (\sqrt{2}\sqrt{x} - x) dx = \left[2\sqrt{2}\frac{x^{3/2}}{3} - \frac{x^2}{2} \right]_0^2 = \frac{2}{3}.$$

□

Exercice 103 Soit $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}_{>0}^2 : 1 \leq xy \leq 3, 1 \leq x^2 - y^2 \leq 4\}$. Calculer

$$\iint_R (x^2 + y^2) dx dy.$$

Indication : utiliser le changement de variables donné par $t = x^2 - y^2$ et $s = xy$.

Proof. L'indication équivaut à considérer le changement de variables $F : \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}^2$ donné par

$$F(s, t) = \left(\sqrt{\frac{t + \sqrt{t^2 + 4s^2}}{2}}, \sqrt{\frac{-t + \sqrt{t^2 + 4s^2}}{2}} \right).$$

C'est clair que F est bijectif, avec application réciproque $G : \mathbb{R}_{>0}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}$ donnée par

$$G(x, y) = (xy, x^2 - y^2).$$

En plus, F et G sont de classe C^1 . Le déterminant de la matrice jacobienne de F est $-1/(2\sqrt{t^2 + 4s^2})$. Soit $D = \{(s, t) \in \mathbb{R}_{>0}^2 : s \in [1, 3], t \in [1, 4]\}$. On voit bien aussi que $F(D) = R$. Si l'on écrit $f(x, y) = x^2 + y^2$, alors $(f \circ F)(s, t) = \sqrt{t^2 + 4s^2}$. En conséquence,

$$\iint_R (x^2 + y^2) dx dy = \iint_D \frac{\sqrt{t^2 + 4s^2}}{2\sqrt{t^2 + 4s^2}} ds dt = \frac{1}{2} \iint_D ds dt = 3.$$

□

Exercice 104 Soit $a > 0$ et $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq a\}$. Montrer que

$$\iint_H e^{-(x^2+y^2)} dx dy = ae^{-a^2} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{a^2 + t^2} dt.$$

Indication : utiliser le changement de variables donné par $x^2 + y^2 = t^2 + a^2$ et $y = sx$.

Proof. Soit $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, x^2 + y^2 > a^2\}$. L'indication équivaut à considérer le changement de variables $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0} \rightarrow U \subseteq \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}$ donné par

$$F(s, t) = \left(\sqrt{\frac{t^2 + a^2}{s^2 + 1}}, s\sqrt{\frac{t^2 + a^2}{s^2 + 1}} \right).$$

C'est clair que F est bijectif, avec application réciproque $G : U \subseteq \mathbb{R}_{>a} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0}$ donnée par

$$G(x, y) = (y/x, \sqrt{x^2 + y^2 - a^2}).$$

En plus, F et G sont de classe C^1 . Soit $D = \{(s, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0} : t > a|s|\}$. On voit bien que $F(D) = H$. Le déterminant de la matrice jacobienne de F est $t/(s^2 + 1)$. Si l'on écrit $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$, alors $(f \circ F)(s, t) = e^{-a^2} e^{-t^2}$. En conséquence,

$$\begin{aligned} \iint_H e^{-(x^2+y^2)} dx dy &= \iint_D \frac{e^{-a^2} e^{-t^2}}{s^2 + 1} ds dt = e^{-a^2} \int_0^{+\infty} \int_{-t/a}^{t/a} e^{-t^2} t \frac{1}{s^2 + 1} ds dt \\ &= e^{-a^2} \int_0^{+\infty} e^{-t^2} t \left[\arctan(s) \right]_{-t/a}^{t/a} dt = -e^{-a^2} \int_0^{+\infty} \arctan(t/a) (-2) t e^{-t^2} dt \\ &= -e^{-a^2} \underbrace{\lim_{M \rightarrow +\infty} \left[e^{-t^2} \arctan(t/a) \right]_0^{+\infty}}_{=0} + e^{-a^2} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{a^2 + t^2} dt \\ &= a e^{-a^2} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{a^2 + t^2} dt, \end{aligned}$$

où l'on a fait une intégration par parties avec $u(t) = \arctan(t/a)$ et $v'(t) = -2te^{-t^2}$ (i.e. $v(t) = e^{-t^2}$) dans la cinquième égalité. \square

Exercice 105 Soit $\epsilon \in]0, 1[$ et $A_\epsilon = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \epsilon^2 \leq x^2 + y^2 \leq 1\}$.

1. Calculer

$$I_\epsilon = \iint_{A_\epsilon} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy.$$

2. Montrer que la limite

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} I_\epsilon$$

existe. Conclure que la fonction $(x, y) \mapsto 1/\sqrt{x^2 + y^2}$ est intégrable dans un voisinage de l'origine et comparer avec la fonction $x \mapsto 1/|x|$.

Proof.

1. On voit bien que

$$I_\epsilon = \iint_{A_\epsilon} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy = \int_0^{2\pi} \int_\epsilon^1 d\theta dr = 2\pi \left[r \right]_\epsilon^1 = 2\pi(1 - \epsilon).$$

2. C'est clair alors que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} I_\epsilon = 2\pi.$$

Par contre,

$$\int_{-1}^{-\epsilon} \frac{1}{|x|} dx + \int_\epsilon^1 \frac{1}{|x|} dx = 2 \int_\epsilon^1 \frac{1}{|x|} dx = 2 \left[\ln(|x|) \right]_\epsilon^1 = 2 \ln(1/\epsilon)$$

diverge quand ϵ tend vers zéro.

\square

Exercice 106 Montrer que l'intégrale de $f(x, y) = x$ sur le disque $x^2 + y^2 - 2x \leq 0$ vaut π .

Proof. On voit bien que $x^2 + y^2 - 2x \leq 0$ équivaut à $(x - 1)^2 + y^2 \leq 1$. On définit $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - 1)^2 + y^2 \leq 1\}$. On considère le changement de variables $F(u, v) = (u + 1, v)$. Soit $R' = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 \leq 1\}$. C'est clair que F est bijectif, de classe C^1 , avec réciproque de classe C^1 , le déterminant de la matrice jacobienne est 1, et $F(R') = R$. Alors,

$$\begin{aligned} \iint_R x dx dy &= \iint_{R'} (u + 1) du dv = \int_0^1 \int_0^{2\pi} (r \cos(\theta) + 1) r d\theta dr \\ &= \int_0^1 \left(r^2 \underbrace{\left[\sin(\theta) \right]_0^{2\pi}}_{=0} + 2\pi r \right) dr = \pi \left[r^2 \right]_0^1 = \pi, \end{aligned}$$

où l'on a utilisé le changement de variables des coordonnées polaires. \square

Exercice 107 On note $\Delta = [0, 1]^2$ et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ on pose

$$I_n = \iint_{\Delta} \frac{(xy)^n dx dy}{1 + xy}.$$

1. Déterminer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n.$$

2. En déduire la valeur de

$$\iint_{\Delta} \frac{dx dy}{1 + xy}.$$

Proof.

1. Soit $f_n : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction donnée par $f_n(x, y) = (xy)^n / (1 + xy)$, pour $n \in \mathbb{N}$. C'est clair que f_n est intégrable sur Δ , pour tout $n \in \mathbb{N}$, puisqu'il s'agit de la restriction de la fonction continue sur un compact. Soit $g_n = f_n|_{\Delta^\circ}$, où Δ° est l'intérieur de Δ . On remarque d'abord que

$$I_n = \iint_{\Delta^\circ} \frac{(xy)^n dx dy}{1 + xy},$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. C'est clair que g_n converge simplement vers la fonction nulle de Δ° . En outre, $|g_n(x, y)| \leq g_0 = 1/(1 + xy)$, pour tout $(x, y) \in \Delta^\circ$, et $g_0 = 1/(1 + xy)$ est intégrable sur Δ° . Le théorème de convergence dominée nous dit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \iint_{\Delta^\circ} \frac{(xy)^n dx dy}{1 + xy} = \iint_{\Delta^\circ} 0 dx dy = 0.$$

2. On voit bien que

$$\begin{aligned} I_n &= \iint_{\Delta} \frac{(xy)^n dx dy}{1 + xy} = \iint_{\Delta} \frac{(1 + xy)(xy)^n dx dy}{1 + xy} - \iint_{\Delta} \frac{(xy)^{n+1} dx dy}{1 + xy} \\ &= \iint_{\Delta} x^n y^n dx dy - I_{n+1} = \frac{1}{(n + 1)^2} - I_{n+1}, \end{aligned}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. Un argument par récurrence simple nous dit que

$$I_n = (-1)^n I_0 + (-1)^n \sum_{m=1}^n \frac{(-1)^m}{m^2},$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme la limite de I_n est zéro quand n tend vers $+\infty$, on conclut que

$$\begin{aligned} \iint_{\Delta} \frac{dx dy}{1+xy} &= I_0 = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k)^2} \\ &= \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^2} - 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k)^2} = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^2} = \frac{\pi^2}{12}, \end{aligned}$$

où l'on a utilisé que

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

(voir l'exercice 7 de la fiche 4).

□

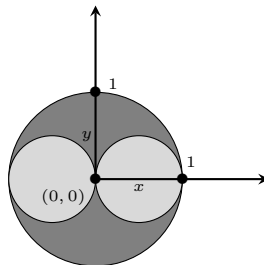
Exercice 108 Calculer l'aire de $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq x^2 + y^2 \leq 1\}$ et l'intégrale

$$\iint_D \frac{dx dy}{1+x^2+y^2}.$$

Proof. On note d'abord que $(x, y) \in D$ si et seulement si $(-x, y) \in D$. Il suffit donc de déterminer $D \cap (\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R})$. Soit $(x, y) \in D$ avec $x \geq 0$. Cela veut dire que $x \leq x^2 + y^2 \leq 1$, *i.e.* $x^2 + y^2 \leq 1$ et $x \leq x^2 + y^2$. La dernière condition est équivalente à $(1/2)^2 \leq (x - 1/2)^2 + y^2$. En conséquence,

$$D = \bar{B}_1(0, 0) \setminus (B_{1/2}(1/2, 0) \cup B_{1/2}(-1/2, 0)),$$

où $B_r(x_0, y_0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < r^2\}$ est la boule ouverte de centre (x_0, y_0) et rayon $r > 0$ et $\bar{B}_r(x_0, y_0)$ est son adhérence. L'aire de D est par conséquent $\pi - 2\pi(1/2)^2 = \pi/2$.



Par ailleurs,

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{dx dy}{1+x^2+y^2} &= \iint_{\bar{B}_1(0,0)} \frac{dx dy}{1+x^2+y^2} - \iint_{B_{1/2}(1/2,0)} \frac{dx dy}{1+x^2+y^2} \\ &\quad - \iint_{B_{1/2}(-1/2,0)} \frac{dx dy}{1+x^2+y^2} \\ &= \iint_{\bar{B}_1(0,0)} \frac{dx dy}{1+x^2+y^2} - 2 \iint_{B_{1/2}(1/2,0)} \frac{dx dy}{1+x^2+y^2}, \end{aligned}$$

puisque la fonction $1+x^2+y^2$ est invariante sous la transformation $(x, y) \mapsto (-x, y)$.

C'est facile à vérifier que

$$\iint_{\bar{B}_1(0,0)} \frac{dx dy}{1+x^2+y^2} = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{r d\theta dr}{1+r^2} = \pi \left[\ln(1+r^2) \right]_0^1 = \pi \ln(2).$$

En outre, si l'on utilise des coordonnées polaires centrées autour du $(1/2, 0)$ (*i.e.* $x = r \cos(\theta) + 1/2$ et $y = r \sin(\theta)$) on trouve que

$$\begin{aligned} \iint_{B_1(1/2,0)} \frac{dx dy}{1+x^2+y^2} &= \int_0^{1/2} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta dr}{\cos(\theta) + r + 5/(4r)} = \int_0^{1/2} \frac{2\pi}{\sqrt{(r + 5/(4r))^2 - 1}} dr \\ &= \int_0^{1/2} \frac{8\pi r}{\sqrt{16r^4 + 24r^2 + 25}} dr = \int_0^1 \frac{\pi}{\sqrt{s^2 + 6s + 25}} ds = \int_{3/4}^1 \frac{\pi}{\sqrt{t^2 + 1}} ds \\ &= \pi \left[\ln \left(|t + \sqrt{1+t^2}| \right) \right]_{3/4}^1 = \pi (\ln(1 + \sqrt{2}) - \ln(2)), \end{aligned}$$

où l'on a utilisé l'identité

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + \cos(\theta)} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - 1}},$$

pour tout $a > 1$ (voir l'exercice **15** de la fiche 0) dans la deuxième égalité, et la substitution $s = 4r^2$ dans la quatrième égalité et la substitution $t = (s + 3)/4$ dans la cinquième.

En conséquence,

$$\iint_D \frac{dx dy}{1+x^2+y^2} = \pi \ln(2) - 2\pi (\ln(1 + \sqrt{2}) - \ln(2)) = 3\pi \ln(2) - 2\pi \ln(1 + \sqrt{2}).$$

□

Exercice 109 Calculer l'aire A de l'intérieur de l'ellipse

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 \leq 1$$

au moyen du changement de variables $x = au \cos(v)$ et $y = bu \sin(v)$.

Proof. Soit $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x/a)^2 + (y/b)^2 < 1\}$. On voit bien que

$$A = \iint_E dx dy = \int_0^1 \int_0^{2\pi} a b u dv du = 2\pi ab \int_0^1 v dv = \pi ab \left[v^2 \right]_0^1 = \pi ab.$$

□

Exercice 110 Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1, |y| \leq x^2\}$. Représenter D , calculer son aire et l'intégrale

$$\iint_D (x^2 - y) dx dy.$$

Proof. L'aire de D est donnée par

$$\iint_D dx dy = \int_{-1}^1 \int_{-x^2}^{x^2} dy dx = \int_{-1}^1 2x^2 dx = 2 \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-1}^1 = \frac{4}{3}.$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} \iint_D (x^2 - y) dx dy &= \int_{-1}^1 \int_{-x^2}^{x^2} (x^2 - y) dy dx = \int_{-1}^1 \left[\frac{2x^2 y - y^2}{2} \right]_{-x^2}^{x^2} \\ &= 2 \int_{-1}^1 x^4 dx = 2 \left[\frac{x^5}{5} \right]_{-1}^1 = \frac{4}{5}. \end{aligned}$$

□

Exercice 111 Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $R \geq 0$, soit $\omega_n(R)$ le volume de la boule

$$\bar{B}_n(R) = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq R^2\} \subseteq \mathbb{R}^n$$

de rayon R . Le but de cet exercice est de calculer $\omega_n(R)$.

1. Montrer que $\omega_n(R) = R^n \omega_n(1)$, pour tout $R \geq 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Redémontrer les formules classiques

$$\omega_1(R) = 2R, \omega_2(R) = \pi R^2 \text{ et } \omega_3(R) = \frac{4}{3} \pi R^3.$$

3. On suppose désormais $n \geq 2$. Soit $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction indicatrice de $\bar{B}_n(1)$ et soit $R_{n-2} = [-1, 1]^{n-2} \subseteq \mathbb{R}^{n-2}$. On écrit $x = x_1$ et $y = x_2$. Montrer que

$$\omega_n(1) = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left(\int_{R_{n-2}} g(x, y, x_3, \dots, x_n) dx_3 \dots dx_n \right) dx dy.$$

4. Montrer que, si $x^2 + y^2 > 1$, $g(x, y, x_3, \dots, x_n) = 0$, tandis que, si $x^2 + y^2 \leq 1$, la fonction $(x_3, \dots, x_n) \mapsto g(x, y, x_3, \dots, x_n)$ (avec x et y fixes) coïncide avec la fonction indicatrice de la boule $\bar{B}_{n-2}(\sqrt{1 - x^2 - y^2})$. En déduire que

$$\int_{R_{n-2}} g(x, y, x_3, \dots, x_n) dx_3 \dots dx_n = (1 - x^2 - y^2)^{(n-2)/2} \omega_{n-2}(1),$$

et en conséquence

$$\omega_n(1) = \omega_{n-2}(1) \iint_{\bar{B}_2(1)} (1 - x^2 - y^2)^{(n-2)/2} dx dy.$$

5. Utiliser le changement de variables des coordonnées polaires pour calculer la dernière intégrale. En déduire que

$$\omega_{2n}(1) = \frac{\pi^n}{n!} \text{ et } \omega_{2n-1}(1) = \frac{2^n \pi^{n-1}}{(2n-1)!!},$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, où l'on rappelle que $(2n-1)!! = (2n-3)!! \cdot (2n-1)$ et $1!! = 1$.

6. Montrer que

$$\omega_n(1) = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(1+n/2)},$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Proof. La solution suit directement des indications détaillées dans l'exercice. \square

Exercice 112

1. L'intégrale $J = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ est-elle convergente ?
2. Pour $a > 0$, on pose $D_a = [0, a] \times [0, a]$, $\Delta_a = \{(x, y) \in \mathbb{R}_{\geq 0}^2 : x^2 + y^2 \leq a^2\}$,

$$Q(a) = \iint_{D_a} f(x)f(y)dx dy \text{ et } C(a) = \iint_{\Delta_a} f(x)f(y)dx dy,$$

où $f(x) = e^{-x^2}$. Encadrer $Q(a)$ à l'aide de la fonction $C(a)$. En déduire la valeur de J .

Proof.

1. On sait que la limite de $e^{-x^2}(1+x^2)$ est zéro quand x tend vers $+\infty$. Cela implique qu'il existe $M > 0$ tel que $e^{-x^2}(1+x^2) \leq 1$ pour tout $x \geq M$. En outre, comme $e^{-x^2}(1+x^2)$ est continue, elle est bornée sur $[0, M]$, *i.e.* il existe $C' > 0$ tel que $e^{-x^2}(1+x^2) \leq C'$ pour tout $x \in [0, M]$. Soit $C = \max(1, C') > 0$. Alors $e^{-x^2}(1+x^2) \leq C$ pour tout $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. En conséquence,

$$J = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \leq C \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx.$$

Comme e^{-x^2} est une fonction positive, on conclut que l'intégrale J est convergente.

2. Comme $\Delta_a \subseteq D_a \subseteq \Delta_{\sqrt{2}a}$ et e^{-x^2} est une fonction positive,

$$C(a) \leq Q(a) \leq C(\sqrt{2}a).$$

Or,

$$C(a) = \iint_{\Delta_a} f(x)f(y)dx dy = \int_0^{\pi/2} \int_0^a e^{-r^2} r dr d\theta = \frac{\pi}{2} \left[-\frac{e^{-r^2}}{2} \right]_0^a = \frac{\pi(1-e^{-a^2})}{4},$$

et

$$Q(a) = \iint_{D_a} f(x)f(y)dx dy = \int_0^a e^{-x^2} dx \int_0^a e^{-y^2} dy = \left(\int_0^a e^{-x^2} dx \right)^2,$$

pour tout $a > 0$. En particulier,

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} C(a) = \frac{\pi}{8} \text{ et } \lim_{a \rightarrow +\infty} Q(a) = J^2.$$

En conséquence,

$$\frac{\pi}{4} = \lim_{a \rightarrow +\infty} C(a) \leq \lim_{a \rightarrow +\infty} Q(a) = J^2 \leq \lim_{a \rightarrow +\infty} C(\sqrt{2}a) = \frac{\pi}{4},$$

et $J = \sqrt{\pi}/2$.

□

Exercice 113 Montrer que

$$B(u, v) = \frac{\Gamma(u)\Gamma(v)}{\Gamma(u+v)},$$

pour tout $(u, v) \in \mathcal{D}$ (voir les exercices **30** et **32** de la fiche 3).

Proof. On sait que

$$\Gamma(u)\Gamma(v) = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-t-s} s^{u-1} t^{v-1} ds dt.$$

On considère le changement de variables donné par l'application $F : \mathbb{R}_{>0} \times]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}_{>0}^2$ définie par $F(x, y) = (x(1-y), xy)$. C'est clair que F est bijectif et de classe C^1 avec réciproque de classe C^1 . Le déterminant de la matrice jacobienne de F est x . En outre, si $f(s, t) = e^{-t-s} t^{u-1} s^{v-1}$, on voit bien que $(f \circ F)(x, y) = e^{-x} x^{u+v-2} (1-y)^{u-1} y^{v-1}$. Cela implique que

$$\begin{aligned} \Gamma(u)\Gamma(v) &= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-t-s} t^{u-1} s^{v-1} dt ds \\ &= \int_0^1 \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{u+v-1} (1-y)^{u-1} y^{v-1} dx dy = \Gamma(u+v)B(u, v). \end{aligned}$$

□

Exercice 114 Soit $c > 0$. Déterminer le volume du simplexe de \mathbb{R}^n donné par

$$\Delta_n(c) = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0, x_1 + \dots + x_n \leq c\}.$$

Proof. On voit bien que

$$\begin{aligned} \int_{\Delta_n(c)} dx_n \dots dx_1 &= \int_0^c \int_0^{x_1} \dots \int_0^{x_{n-3}} \int_0^{x_{n-2}} \int_0^{x_{n-1}} dx_n dx_{n-1} dx_{n-2} \dots dx_2 dx_1 \\ &= \int_0^c \int_0^{x_1} \dots \int_0^{x_{n-3}} \int_0^{x_{n-2}} x_{n-1} dx_{n-1} dx_{n-2} \dots dx_2 dx_1 \\ &= \int_0^c \int_0^{x_1} \dots \int_0^{x_{n-3}} \frac{x_{n-2}^2}{2} dx_{n-2} \dots dx_2 dx_1 = \frac{c^n}{n!}. \end{aligned}$$

□

Exercice 115 *Intégrales de Fresnel* On pose

$$I = \int_0^{+\infty} \cos(t^2) dt \text{ et } J = \int_0^{+\infty} \sin(t^2) dt.$$

1. Soient

$$I' = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(s)}{\sqrt{s}} ds \text{ et } J' = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(s)}{\sqrt{s}} ds.$$

Montrer que $I = I'/2$ et $J = J'/2$.

2. Montrer que I et J sont bien définies.

3. En utilisant

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx,$$

montrer que

$$\frac{1}{\sqrt{t}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-tx^2} dx,$$

pour tout $t > 0$.

4. Justifier que

$$\int_0^{+\infty} \left(\int_A^B e^{it} e^{-tx^2} dt \right) dx = \int_A^B \left(\int_0^{+\infty} e^{it} e^{-tx^2} dx \right) dt,$$

pour tous $0 < A < B$. En déduire que

$$\int_A^B \frac{e^{it}}{\sqrt{t}} dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \left(\int_A^B e^{it} e^{-tx^2} dt \right) dx.$$

5. Montrer par passage à la limite que

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{it}}{\sqrt{t}} dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{i + u^2}{1 + u^4} du.$$

6. En déduire que

$$I = J = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Proof.

1. On voit bien que $I'/2$ et $J'/2$ s'obtiennent de I et J , respectivement, à partir de la substitution $s = t^2$.

2. D'après l'item précédent il suffit de montrer que I' et J' convergent, ou, de façon équivalente, il suffit de montrer que l'intégrale

$$K' = \int_0^{+\infty} \frac{e^{is}}{\sqrt{s}} ds$$

converge. On remarque qu'il ne s'agit pas de convergence absolue dans ce cas (K' ne converge pas absolument). Comme e^{is}/\sqrt{s} est absolument intégrable sur $]0, 1]$, puisque $|e^{is}|/\sqrt{s} = 1/\sqrt{s}$ est absolument intégrable sur $]0, 1]$, il suffit de démontrer que

$$K'' = \int_1^{+\infty} \frac{e^{is}}{\sqrt{s}} ds$$

converge. Or, une intégration par parties avec $u(s) = 1/\sqrt{s}$ et $v'(s) = e^{is}$ nous dit que

$$K'' = \int_1^{+\infty} \frac{e^{is}}{\sqrt{s}} ds = \lim_{M \rightarrow +\infty} \left[\frac{e^{is}}{i\sqrt{s}} \right]_1^M + \frac{1}{2i} \int_1^{+\infty} \frac{e^{is}}{\sqrt{s^3}} ds = ie^i + \frac{1}{2i} \int_1^{+\infty} \frac{e^{is}}{\sqrt{s^3}} ds.$$

Comme $|e^{is}|/\sqrt{s^3} = 1/\sqrt{s^3}$ est absolument intégrable sur $\mathbb{R}_{>1}$, on conclut que K'' converge. En conséquence, I et J convergent.

3. On voit bien que

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-tx^2} dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}\sqrt{t}} \int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy = \frac{1}{\sqrt{t}},$$

où l'on a fait la substitution $y = \sqrt{t}x$.

4. On note que l'application $x \mapsto e^{it}e^{-tx^2}$ est absolument intégrable sur $\mathbb{R}_{>0}$, pour tout $t \in \mathbb{R}_{>0}$, et l'application $t \mapsto \int_0^{+\infty} |e^{it}e^{-tx^2}| dx$ est intégrable sur $[A, B]$. La première identité de cet item est alors une conséquence du théorème de Fubini. En plus,

$$\begin{aligned} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \left(\int_A^B e^{it}e^{-tx^2} dt \right) dx &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_A^B \left(\int_0^{+\infty} e^{it}e^{-tx^2} dx \right) dt \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_A^B e^{it} \left(\int_0^{+\infty} e^{-tx^2} dx \right) dt = \int_A^B \frac{e^{it}}{\sqrt{t}} dt. \end{aligned}$$

5. On voit que

$$\int_A^B e^{it}e^{-tx^2} dt = \left[\frac{e^{t(i-x^2)}}{(i-x^2)} \right]_A^B = \frac{e^{B(i-x^2)} - e^{A(i-x^2)}}{(i-x^2)} \quad (19)$$

et sa valeur absolue est majorée par $(e^{-Bx^2} + e^{-Ax^2})/|i-x^2|$, qui est majorée par $2/|i-x^2|$, qui est intégrable sur $\mathbb{R}_{>0}$. La limite simple de (19) quand A tend vers zéro et B tend vers $+\infty$ est $1/(i-x^2) = (i+x^2)/(1+x^4)$. En conséquence, le théorème de convergence dominée nous dit que

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{it}}{\sqrt{t}} dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \lim_{A \rightarrow 0} \lim_{B \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \left(\int_A^B e^{it}e^{-tx^2} dt \right) dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{i+x^2}{1+x^4} dx.$$

6. Comme les racines de $1+u^4$ sont les racines primitives de l'unité d'ordre 4, on voit que

$$u^4 + 1 = (u - \zeta)(u - \zeta^3)(u - \zeta^5)(u - \zeta^7),$$

où $\zeta = e^{2\pi i/8} = e^{i\pi/4}$. Comme $\zeta^7 = \bar{\zeta}$ et $\zeta^5 = \bar{\zeta}^3$, on conclut que

$$\begin{aligned} u^4 + 1 &= (u - \zeta)(u - \bar{\zeta})(u - \zeta^3)(u - \bar{\zeta}^3) = (u^2 - 2\operatorname{Re}(\zeta)u + 1)(u^2 - 2\operatorname{Re}(\zeta^3)u + 1) \\ &= (u^2 - \sqrt{2}u + 1)(u^2 + \sqrt{2}u + 1), \end{aligned}$$

où l'on a utilisé que $\operatorname{Re}(\zeta) = \cos(\pi/4) = \sqrt{2}/2$ et $\operatorname{Re}(\zeta^3) = \cos(3\pi/4) = -\sqrt{2}/2$. En outre, on peut vérifier que

$$\begin{aligned} \frac{1}{u^4 + 1} &= -\frac{1}{4\sqrt{2}} \frac{2u - \sqrt{2}}{(u^2 - \sqrt{2}u + 1)} + \frac{1}{4\sqrt{2}} \frac{2u + \sqrt{2}}{(u^2 + \sqrt{2}u + 1)} \\ &\quad + \frac{1}{4\sqrt{2}} \frac{\sqrt{2}}{(u^2 - \sqrt{2}u + 1)} + \frac{1}{4\sqrt{2}} \frac{\sqrt{2}}{(u^2 + \sqrt{2}u + 1)}. \end{aligned}$$

En conséquence,

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+u^4} du &= \lim_{M \rightarrow +\infty} \frac{1}{4\sqrt{2}} \left[\ln \left(\left| \frac{u^2 + \sqrt{2}u + 1}{u^2 - \sqrt{2}u + 1} \right| \right) \right. \\ &\quad \left. + 2 \arctan(\sqrt{2}u - 1) + 2 \arctan(\sqrt{2}u + 1) \right]_0^M = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

De façon analogue, on trouve que

$$\begin{aligned} \frac{u^2}{u^4 + 1} &= \frac{1}{4\sqrt{2}} \frac{2u - \sqrt{2}}{(u^2 - \sqrt{2}u + 1)} - \frac{1}{4\sqrt{2}} \frac{2u + \sqrt{2}}{(u^2 + \sqrt{2}u + 1)} \\ &+ \frac{1}{4\sqrt{2}} \frac{\sqrt{2}}{(u^2 - \sqrt{2}u + 1)} + \frac{1}{4\sqrt{2}} \frac{\sqrt{2}}{(u^2 + \sqrt{2}u + 1)}. \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{u^2}{1 + u^4} du &= \lim_{M \rightarrow +\infty} \frac{1}{4\sqrt{2}} \left[\ln \left(\left| \frac{u^2 - \sqrt{2}u + 1}{u^2 + \sqrt{2}u + 1} \right| \right) \right. \\ &\left. + 2 \arctan(\sqrt{2}u - 1) + 2 \arctan(\sqrt{2}u + 1) \right]_0^M = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Cela implique que $I' = J' = \sqrt{\pi/2}$ et

$$I = J = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

□

Exercice 116 Soient $A_R = [0, R] \times [0, R]$ et $D_R = \{(x, y) \in \mathbb{R}_{>0}^2 : x^2 + y^2 \leq R^2\}$. Calculer les limites des intégrales

$$\iint_{A_R} \sin(x^2 + y^2) dx dy \quad \text{et} \quad \iint_{D_R} \sin(x^2 + y^2) dx dy$$

quand R tend vers $+\infty$, si elles existent.

Proof. On voit bien que

$$\begin{aligned} \iint_{D_R} \sin(x^2 + y^2) dx dy &= \int_0^R \int_0^{\pi/2} \sin(r^2) r d\theta dr = \frac{\pi}{4} \left[-\cos(r^2) \right]_0^R \\ &= \frac{\pi}{4} (1 - \cos(R^2)), \end{aligned}$$

ce qui implique que

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \iint_{D_R} \sin(x^2 + y^2) dx dy$$

n'existe pas.

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} \iint_{A_R} \sin(x^2 + y^2) dx dy &= \int_0^R \int_0^R \left(\sin(x^2) \cos(y^2) + \sin(y^2) \cos(x^2) \right) dx dy \\ &= 2 \int_0^R \int_0^R \sin(x^2) \cos(y^2) dx dy \\ &= 2 \left(\int_0^R \sin(x^2) dx \right) \left(\int_0^R \cos(y^2) dy \right). \end{aligned}$$

L'exercice précédent nous dit que la limite quand R tend vers $+\infty$ existe et elle vaut $2.I.J = \pi/4$. □

Exercice 117 Calcul d'intégrales doubles à l'aide de lignes de niveau

1. Soit $\Delta \subseteq \mathbb{R}^2$ un fermé et $F : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Soient $a \leq b$ deux réels fixes. On suppose que $\Omega = \{(x, y) \in \Delta : a \leq F(x, y) \leq b\}$ est un compact de \mathbb{R}^2 . Pour tout $k \in [a, b]$, on définit $\Omega_k = \{(x, y) \in \Delta : a \leq F(x, y) \leq k\}$. On considère les fonctions $A, I : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ données par

$$A(k) = \iint_{\Omega_k} dx dy \text{ et } I(k) = \iint_{\Omega_k} F(x, y) dx dy.$$

On suppose que la fonction A est dérivable sur $[a, b]$ avec dérivée continue. Montrer que I est dérivable de dérivée $I'(k) = kA'(k)$. En déduire que

$$I(b) = \iint_{\Omega} F(x, y) dx dy = \int_a^b I'(k) dk.$$

2. On va considérer l'application suivante. Calculer

$$\iint_{\Omega} \left(\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} \right) dx dy \text{ et } \iint_D \frac{dx dy}{(1+x+y)^3},$$

où

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2/\alpha^2 + y^2/\beta^2 \leq 1\} \text{ et } D = \{(x, y) \in \mathbb{R}_{\geq 0}^2 : x + y \leq 1\}.$$

Proof.

1. On écrit

$$\frac{I(k+h) - I(k)}{h} = \frac{\iint_{\Omega_{k+h} \setminus \Omega_k^\circ} F(x, y) dx dy}{h}.$$

Comme

$$\begin{aligned} k \frac{A(k+h) - A(k)}{h} &= k \frac{\iint_{\Omega_{k+h} \setminus \Omega_k^\circ} dx dy}{h} \leq \frac{\iint_{\Omega_{k+h} \setminus \Omega_k^\circ} F(x, y) dx dy}{h} \\ &\leq (k+h) \frac{\iint_{\Omega_{k+h} \setminus \Omega_k^\circ} dx dy}{h} = (k+h) \frac{A(k+h) - A(k)}{h}, \end{aligned}$$

On conclut que la limite de $(I(k+h) - I(k))/h$ converge vers $kA'(k)$ quand h tend vers zéro. En conséquence, I est dérivable et $I'(k) = kA'(k)$, pour tout $k \in [a, b]$. La dernière égalité est une conséquence immédiate.

2. Pour la première intégrale on aura $\Delta = \mathbb{R}^2$, $F(x, y) = (x/\alpha)^2 + (y/\beta)^2$ et $[a, b] = [0, 1]$. Or, on sait que

$$A_\Omega(k) = \iint_{\Omega_k} dx dy = \pi \alpha \beta k$$

(voir l'exercice 7). En conséquence, $A'_\Omega(k) = \pi \alpha \beta$ est une fonction constante. D'après l'item précédent, on conclut que

$$\iint_{\Omega} \left(\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} \right) dx dy = \int_0^1 \pi \alpha \beta k dk = \frac{\pi \alpha \beta}{2}.$$

En outre, pour la deuxième intégrale on aura $\Delta = \mathbb{R}_{\geq 0}^2$, $F(x, y) = 1/(1+x+y)^3$ et $[a, b] = [1/8, 1]$. C'est facile à voir que

$$A_D(k) = \iint_{D_k} dx dy = \frac{1}{\sqrt[3]{k}} - \frac{1}{2\sqrt[3]{k^2}}.$$

En conséquence, $A'_D(k) = (k^{-5/3} - k^{-4/3})/3$. D'après l'item précédent, on conclut que

$$\iint_D \frac{dx dy}{(1+x+y)^3} = \int_{1/8}^1 \frac{k^{-2/3} - k^{-1/3}}{3} dk = \frac{1}{8}.$$

□

Exercice 118 Montrer que

$$-\frac{1}{2} = \int_0^1 \int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3} dx dy \neq \int_0^1 \int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3} dy dx = \frac{1}{2}.$$

Y a-t-il une contradiction avec le théorème de Fubini ?

Proof. On voit bien que

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3} dx dy &= \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{1}{(x+y)^2} - \frac{2y}{(x+y)^3} \right) dx dy \\ &= \int_0^1 \left[-\frac{1}{x+y} + \frac{y}{(x+y)^2} \right]_0^1 dy \\ &= -\int_0^1 \frac{1}{(1+y)^2} dy = \left[\frac{1}{1+y} \right]_0^1 = -\frac{1}{2}, \end{aligned}$$

tandis que

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3} dy dx &= -\int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{1}{(x+y)^2} - \frac{2x}{(x+y)^3} \right) dy dx \\ &= -\int_0^1 \left[-\frac{1}{x+y} + \frac{x}{(x+y)^2} \right]_0^1 dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{(1+x)^2} dx = -\left[\frac{1}{1+x} \right]_0^1 = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Il n'y a aucune contradiction avec le théorème de Fubini. Pour le voir, on note $f : [0, 1]^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ l'application $f(x, y) = (x-y)/(x+y)^3$ et f_y celle donnée par $x \mapsto (x-y)/(x+y)^3$. Pour tout $y \in]0, 1]$, l'application $|f_y|$ donnée par $x \mapsto |(x-y)/(x+y)^3|$ est intégrable sur $[0, 1]$. Par contre, l'application $y \mapsto \int_0^1 |f_y(x)| dx$ n'est pas intégrable. En effet,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 \left| \frac{x-y}{(x+y)^3} \right| dx dy &\geq \int_0^1 \int_0^y \frac{|x-y|}{(x+y)^3} dx dy = \int_0^1 \int_0^y \frac{y-x}{(x+y)^3} dx dy \\ &= \int_0^1 \left[\frac{1}{x+y} - \frac{y}{(x+y)^2} \right]_0^y dy = \int_0^1 \frac{1}{4y} dy \end{aligned}$$

diverge. □

Exercice 119 Dans cet exercice, on s'intéresse à la transformée de Fourier F de la fonction Gaussienne $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto e^{-\pi x^2} .$$

1. En appliquant le théorème de Fubini, montrer que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi(x^2+y^2)} dx dy = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx \right)^2 .$$

2. En déduire la valeur de $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$.

3. Soit $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\xi \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x^2} e^{-2\pi i x \xi} dx .$$

(a) Montrer que F est dérivable et que, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$,

$$F'(\xi) = i \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x) e^{-2\pi i x \xi} dx .$$

(b) Montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} f'(x) e^{-2\pi i x \xi} dx = 2\pi i \xi \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-2\pi i x \xi} dx$

(c) En déduire que $F(\xi) = e^{-\pi \xi^2}$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}$.

Exercice 120 Soit P un rectangle de \mathbb{R}^2 . On appelle *partie pavable* de P toute réunion finie de rectangles inclus dans P . On note \mathcal{P} l'ensemble des parties pavables de P .

1. Montrer que si A_1 et A_2 appartiennent à \mathcal{P} , alors $A_1 \cup A_2$ appartient à \mathcal{P} et $P \setminus A_1$ aussi. Faire des dessins. Montrer de plus que tout élément de \mathcal{P} peut s'écrire comme réunion finie de rectangles deux à deux disjoints.
2. Soit X une partie de \mathbb{R}^2 incluse dans P . On note

$$J^+(X) = \inf \{ \text{mes}(A) : A \in \mathcal{P}, X \subseteq A \} \text{ et } J^-(X) = \sup \{ \text{mes}(A) : A \in \mathcal{P}, A \subseteq X \} .$$

Montrer que $J^+(X) \geq I^+(\mathbb{1}_X)$ et $J^-(X) \leq I^-(\mathbb{1}_X)$.

3. Montrer que si v est un fonction en escalier telle que $v \geq \mathbb{1}_X$, alors il existe $A \in \mathcal{P}$ tel que $v \geq \mathbb{1}_A \geq \mathbb{1}_X$. En déduire que $J^+(X) = I^+(\mathbb{1}_X)$. De manière analogue, montrer que $J^-(X) = I^-(\mathbb{1}_X)$.
4. Montrer que X est cubable si et seulement si $J^+(X) = J^-(X)$. Si X est cubable, alors $\text{mes}(X) = J^+(X) = J^-(X)$.
5. X est négligeable si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $A \in \mathcal{P}$ tel que $X \subseteq A$ et $\text{mes}(A) \leq \epsilon$. Montrer qu'un ensemble négligeable est cubable de mesure nulle.
6. Soit $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ telle que il existe $M \geq 0$ tel que

$$\|\varphi(s) - \varphi(t)\|_\infty \leq M|s - t| ,$$

pour tout $s, t \in [0, 1]$. Montrer que $\varphi([0, 1])$ est négligeable.

7. Soit D une partie fermée de P telle que la frontière de D soit donnée par une courbe C^1 par morceaux. Notons X la frontière de D . Soit $\epsilon > 0$. D'après la question précédente, il existe $A \in \mathcal{P}$ tel que $X \subseteq A$ et $\text{mes}(A) \leq \epsilon$. Alors $P \setminus A$ est une réunion de rectangles R_1, \dots, R_N .

Montrer par un raisonnement par l'absurde et en utilisant un argument de connexité que, pour tout i , $R_i \subseteq D$ ou $R_i \subseteq P \setminus D$.

En déduire qu'il existe $I \subseteq \{1, \dots, N\}$ tel que

$$\bigcup_{i \in I} R_i \subseteq D \subseteq \bigcup_{i \in I} R_i \cup A.$$

Montrer que D est cubable.

Proof. La solution suit directement des indications détaillées dans l'exercice. \square

8 Espaces probabilisés, variables aléatoires discrètes

8.1 Espaces de probabilité

Exercice 121 Soit \mathbb{P} une probabilité sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$, où l'on rappelle que, étant donné un ensemble Ω , $\mathcal{P}(\Omega) = \{A : A \subseteq \Omega\}$. Montrer que $\mathbb{P}(\{n\})$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

Proof. D'après la définition d'espace probabilisé, on voit bien que

$$1 = \mathbb{P}(\mathbb{N}) = \mathbb{P}\left(\bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} \{n\}\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(\{n\}).$$

Comme la dernière série est (absolument) convergente, $\mathbb{P}(\{n\})$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. \square

Exercice 122 Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et soient $A, B \in \mathcal{A}$. Montrer que $\mathbb{P}(A \cap B) \leq \min(\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B))$.

Proof. Il suffit de montrer que, étant donnés $A, C \in \mathcal{A}$ tels que $C \subseteq A$, alors $\mathbb{P}(C) \leq \mathbb{P}(A)$. En effet, comme $A = C \sqcup (A \setminus C)$, alors $\mathbb{P}(C) + \mathbb{P}(A \setminus C) = \mathbb{P}(A)$, ce qui nous dit que $\mathbb{P}(C) \leq \mathbb{P}(A)$, vu que $\mathbb{P}(A \setminus C) \geq 0$. \square

Exercice 123 On a un alphabet de 5 lettres $\{a, b, c, d, e\}$ et on considère l'ensemble des mots de 25 lettres. On tire au hasard un mot dans cet ensemble. Quelle est la probabilité qu'il comporte 5 a , 5 b , 5 c , 5 d et 5 e ?

Proof. L'univers de l'espace probabilisé est $\Omega = \{a, b, c, d, e\}^{25}$, avec tribu $\mathcal{P}(\Omega)$. Cet espace est équiprobable, *i.e.* la probabilité \mathbb{P} est définie classiquement par

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\#(A)}{\#(\Omega)},$$

pour tout $A \subseteq \Omega$. C'est clair que $\#(\Omega) = 5^{25}$. Pour tout $\bar{x} = (x_1, \dots, x_{25}) \in \Omega$ et $\ell \in \{a, b, c, d, e\}$, on définit $I_\ell(\bar{x}) = \{i \in \llbracket 1, 25 \rrbracket : x_i = \ell\}$ et $N_\ell(\bar{x}) = \#(I_\ell(\bar{x}))$, où l'on rappelle que $\llbracket i, j \rrbracket = \{n \in \mathbb{Z} : i \leq n \leq j\}$, pour tout $i, j \in \mathbb{Z}$. L'évènement demandé est donné par

$$E = \{\bar{x} \in \Omega : N_\ell(\bar{x}) = 5, \text{ pour tout } \ell \in \{a, b, c, d, e\}\}.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$ et X un ensemble, on écrit $\mathcal{P}_n(X) = \{A \subseteq X \text{ et } \#(A) = n\}$. On voit bien que l'application $\varphi : E \rightarrow \mathcal{P}_5(\llbracket 1, 25 \rrbracket)^5$ donnée par

$$\varphi(\bar{x}) = (I_a(\bar{x}), I_b(\bar{x}), I_c(\bar{x}), I_d(\bar{x}), I_e(\bar{x}))$$

est injective, avec image formée par les uplets $(J_a, J_b, J_c, J_d, J_e) \in \mathcal{P}_5(\llbracket 1, 25 \rrbracket)^5$ tels que

$$\bigsqcup_{\ell \in \{a, b, c, d, e\}} J_\ell = \llbracket 1, 25 \rrbracket.$$

C'est clair que l'image de φ a cardinal $25!/(5!)^5$, et en conséquence

$$\mathbb{P}(E) = \frac{25!}{(5!)^5 5^{25}}.$$

\square

Exercice 124 On fait 2 lancers avec trois dés. Quelle est la probabilité d'avoir les mêmes résultats si

1. les dés sont de trois couleurs différentes? (Dans ce cas le résultat d'un lancer est un triplet donnant le résultat de chaque dé)
2. les dés sont indiscernables? (Dans ce cas le résultat d'un lancer est l'ensemble des résultats avec leur multiplicité, par exemple deux 1 et un 5)

Proof.

1. L'univers de l'espace probabilisé est $\Omega_a = \llbracket 1, 6 \rrbracket^6$, avec tribu $\mathcal{P}(\Omega_a)$. Cet espace est équiprobable. C'est clair que $\#(\Omega_a) = 6^6$. Un élément $(\bar{x}, \bar{y}) = (x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3) \in \Omega_a$ (i.e. $\bar{x}, \bar{y} \in \llbracket 1, 6 \rrbracket^3$) représente la situation où le i -ème dé a la face marquée par x_i au premier lancer et y_i au deuxième lancer. L'évènement demandé est donné par

$$E_a = \{(\bar{x}, \bar{y}) \in \Omega_a : \bar{x} = \bar{y}\}.$$

On voit bien que l'application $\varphi : E_a \rightarrow \llbracket 1, 6 \rrbracket^3$ donnée par

$$\varphi(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{x}$$

est bijective. En conséquence $\#(E_a) = 6^3$ et

$$\mathbb{P}(E_a) = \frac{1}{6^3}.$$

2. On définit $X = \{\bar{x} = (x_1, \dots, x_6) \in \mathbb{N}^6 : \sum_{i=1}^6 x_i = 3\}$. Pour compter les éléments \bar{x} de X , on divise en trois cas (disjoints) :
 - (i) il existe $i \in \llbracket 1, 6 \rrbracket$ tel que $x_i = 3$;
 - (ii) il existe $i \in \llbracket 1, 6 \rrbracket$ tel que $x_i = 2$;
 - (iii) pour tout $i \in \llbracket 1, 6 \rrbracket$, $x_i \leq 1$.

On a $C_i = 6$ éléments dans le cas (i), $C_{ii} = 6 \cdot 5 = 30$ éléments dans le cas (ii) et $C_{iii} = 6!/(3!3!) = 20$ dans le dernier. On considère X muni de la tribu $\mathcal{P}(X)$. Par contre, il ne s'agit pas d'un espace équiprobable, si l'on veut qu'il modélise le tirage de 3 dés indiscernables : la probabilité $\mathbb{P}'(\{\bar{x}\})$ d'un élément \bar{x} dans le cas (i) est $1/6^3$, celle d'un élément \bar{x} dans (ii) est $3/6^3$ et la probabilité d'un élément \bar{x} du type (iii) est $1/6^2$. On vérifie bien que

$$\sum_{\bar{x} \in X} \mathbb{P}'(\{\bar{x}\}) = C_i \frac{1}{6^3} + C_{ii} \frac{3}{6^3} + C_{iii} \frac{1}{6^2} = 1.$$

L'univers de l'espace probabilisé est $\Omega_b = X \times X$, avec tribu $\mathcal{P}(\Omega_b)$. La probabilité $\mathbb{P}(\{(\bar{x}, \bar{y})\})$ de $(\bar{x}, \bar{y}) \in \Omega_b$ est $\mathbb{P}'(\{\bar{x}\})\mathbb{P}'(\{\bar{y}\})$. L'évènement demandé est donné par

$$E_b = \{(\bar{x}, \bar{y}) \in \Omega_b : \bar{x} = \bar{y}\}.$$

Dans ce cas, on trouve

$$\mathbb{P}(E_b) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{\bar{x} \in X} \{(\bar{x}, \bar{x})\}\right) = \sum_{\bar{x} \in X} \mathbb{P}'(\{\bar{x}\})^2 = C_i \left(\frac{1}{6^3}\right)^2 + C_{ii} \left(\frac{3}{6^3}\right)^2 + C_{iii} \left(\frac{1}{6^2}\right)^2 = \frac{83}{3 \cdot 6^4}.$$

□

Exercice 125 Après avoir bien mélangé un jeu de 52 cartes, on en fait une pile.

1. Quelle est la probabilité que le 2 de cœur soit à la dernière place ?
2. Quelle est la probabilité que l'as de pique se trouve au dessus de l'as de cœur ?
3. Quelle est la probabilité que l'as de pique soit au dessus de l'as de cœur et que celui-ci soit au dessus de l'as de carreau ?
4. Quelle est la probabilité que l'as de pique et l'as de trèfle ne soient pas adjacents ?

Proof. On suppose que les cartes sont numérotées de 1 à 52 : par exemple, l'as de pique est le 1, l'as de cœur est le 2, l'as de carreau est le 3, l'as de trèfle est le 4, le 2 de pique est le 5, le 2 de cœur est le 6, etc. La position d'une carte dans la pile est déterminée de façon relative à la table sur laquelle la pile est posée, la première position étant celle du dessous et la dernière celle du dessus. L'univers de l'espace probabilisé est $\Omega = \mathbb{S}_{52} = \{\sigma : \llbracket 1, 52 \rrbracket \rightarrow \llbracket 1, 52 \rrbracket : \sigma \text{ est bijectif}\}$, avec tribu $\mathcal{P}(\Omega)$. Cet espace est équiprobable. L'élément $\sigma \in \Omega$ représente la situation où la i -ème carte est dans la $\sigma(i)$ -ème position dans la pile. C'est clair que $\#\Omega = 52!$.

1. L'évènement demandé est donné par

$$E_a = \{\sigma \in \Omega : \sigma(6) = 52\}.$$

C'est clair que $\#(E_a) = 51!$, ce qui implique que

$$\mathbb{P}(E_a) = \frac{1}{52}.$$

2. L'évènement demandé est donné par

$$E_b = \{\sigma \in \Omega : \sigma(1) > \sigma(2)\}.$$

On voit bien que l'application $\varphi : E_b \rightarrow \Omega \setminus E_b$ donnée par

$$\varphi(\sigma) = \sigma \circ (12)$$

est bijective, où $(12) \in \Omega$ est la transposition qui envoie 1 dans 2 et 2 dans 1. En conséquence

$$\#\Omega = \#(E_b) + \#(\Omega \setminus E_b) = 2\#(E_b),$$

ce qui implique que

$$\mathbb{P}(E_b) = \frac{1}{2}.$$

3. L'évènement demandé est donné par

$$E_c = \{\sigma \in \Omega : \sigma(1) > \sigma(2) > \sigma(3)\}.$$

Pour tout $\tau \in \mathbb{S}_3$, on définit l'application $\tau_* : E_c \rightarrow \Omega$ donnée par

$$\tau_*(\sigma) = \sigma \circ \tau.$$

On voit bien qu'elle est injective. Soit E_c^τ l'image de τ_* . On note que $E_c^\tau = E_c$, si $\tau \in \mathbb{S}_3$ est l'identité, et que $\#(E_c^\tau) = \#(E_c)$, pour tout $\tau \in \mathbb{S}_3$. De plus,

$$\bigsqcup_{\tau \in \mathbb{S}_3} E_c^\tau = \Omega,$$

ce qui implique que $\#\Omega = \#\mathbb{S}_3 \cdot \#(E_c) = 6\#(E_c)$. En conséquence

$$\mathbb{P}(E_c) = \frac{1}{6}.$$

4. L'évènement complémentaire à l'évènement E_d demandé est donné par

$$\Omega \setminus E_d = \{\sigma \in \Omega : |\sigma(1) - \sigma(4)| = 1\}.$$

Soit $\Omega' = \{\sigma : \llbracket 2, 52 \rrbracket \rightarrow \llbracket 2, 52 \rrbracket : \sigma \text{ est bijectif}\}$. C'est clair que $\#(\Omega') = 51!$. On considère l'application $\varphi_1 : \Omega \setminus E_d \rightarrow \Omega'$ donnée par

$$\varphi_1(\sigma)(i) = \begin{cases} \sigma(i) + 1, & \text{si } \sigma(i) \leq \min(\sigma(1), \sigma(4)), \\ \sigma(4), & \text{si } i = 4 \text{ et } \sigma(1) < \sigma(4), \\ \sigma(4) + 1, & \text{si } i = 4 \text{ et } \sigma(1) > \sigma(4), \\ \sigma(i), & \text{si } \sigma(i) > \max(\sigma(1), \sigma(4)), \end{cases}$$

pour tout $i \in \llbracket 2, 52 \rrbracket$. Soit l'application $\varphi_2 : \Omega \setminus E_d \rightarrow \{\pm 1\}$ donnée par $\varphi_2(\sigma) = \text{sgn}(\sigma(1) - \sigma(4))$. On voit bien que l'application $\varphi : \Omega \setminus E_d \rightarrow \Omega' \times \{\pm 1\}$ définie via $\varphi(\sigma) = (\varphi_1(\sigma), \varphi_2(\sigma))$ est bijective. Cela implique que $\#(\Omega \setminus E_d) = 2 \cdot 51!$, ce qui nous dit que

$$\mathbb{P}(E_d) = 1 - \frac{2}{52} = \frac{25}{26}.$$

□

Exercice 126 *Premier problème du chevalier de Méré* Quel est le plus probable : jouant avec un dé, obtenir au moins une fois 6 en 4 coups, ou bien jouant avec deux dés (discernables), obtenir au moins une fois un double 6 en 24 coups ?

Proof. L'univers de l'espace probabilisé dans la première situation est $\Omega_1 = \llbracket 1, 6 \rrbracket^4$, avec tribu $\mathcal{P}(\Omega_1)$. Cet espace est équiprobable. C'est clair que $\#(\Omega_1) = 6^4$. Un élément $\bar{x} = (x_1, \dots, x_4) \in \Omega$ représente la situation où l'on a obtenu la face marquée par x_i au i -ème lancer. L'évènement complémentaire à l'évènement E_1 demandé est donné par

$$\Omega_1 \setminus E_1 = \llbracket 1, 5 \rrbracket^4.$$

En conséquence $\#(\Omega_1 \setminus E_1) = 5^4$ et

$$\mathbb{P}(E_1) = 1 - \frac{5^4}{6^4}.$$

L'univers de l'espace probabilisé dans la deuxième situation est $\Omega_2 = \llbracket 1, 6 \rrbracket^{48}$, avec tribu $\mathcal{P}(\Omega_2)$. Cet espace est équiprobable. C'est clair que $\#(\Omega_2) = 6^{48}$. Un élément $\bar{x} = (x_1, \dots, x_{48}) \in \Omega$ représente la situation où l'on a obtenu la face marquée par x_{2i-1} au i -ème lancer pour le premier dé et la face marquée par x_{2i} au i -ème lancer pour le deuxième dé. L'évènement complémentaire à l'évènement E_2 demandé est donné par

$$\Omega_2 \setminus E_2 = X^{24},$$

où $X = \llbracket 1, 6 \rrbracket^2 \setminus \{(6, 6)\}$. Comme $\#(X) = 35$, $\#(\Omega_2 \setminus E_2) = 35^{24}$ et

$$\mathbb{P}(E_2) = 1 - \frac{35^{24}}{36^{24}}.$$

Un calcul simple nous dit que $\mathbb{P}(E_1) > \mathbb{P}(E_2)$. □

Exercice 127 *Second problème du chevalier de Méré* Le chevalier de Méré avait posé à Pascal le problème suivant : deux joueurs jouent à un jeu de hasard en plusieurs parties ;

celui qui, le premier, a gagné trois parties emporte la totalité de l'enjeu. On considère que la probabilité de gagner une partie est la même pour chaque joueur. Si les joueurs doivent arrêter le jeu alors qu'il ne manque au premier joueur, pour l'emporter, qu'une partie, et au second que deux parties, comment doit-on répartir équitablement l'enjeu ?

Proof. On note A et B les deux joueurs. On suppose que le joueur A a gagné deux parties et que B a gagné une seule partie. Les possibles façons de finir le jeu seraient : A , BA et BB , où l'on écrit les lettres qui correspondent au joueur qui a gagné. La probabilité de A est $1/2$, celle de BA est $1/4$ et celle de BB est $1/4$. Alors, la probabilité totale de l'évènement "le joueur A a emporté l'enjeu" est $3/4$, tandis que probabilité totale de l'évènement "le joueur B a emporté l'enjeu" est $1/4$. Une façon équitable de faire la répartition de l'enjeu serait alors 75% pour A et 25% pour B . \square

Exercice 128 *Problème des anniversaires* Quelle est la probabilité pour que n personnes prises au hasard aient toutes des jours d'anniversaire différents ? On supposera que tous les jours de naissance sont équiprobables et on ne tiendra pas compte des années bissextiles.

Proof. L'univers de l'espace probabilisé est $\Omega = \llbracket 1, 365 \rrbracket^n$, avec tribu $\mathcal{P}(\Omega)$. Cet espace est équiprobable. C'est clair que $\#(\Omega) = 365^n$. Un élément $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega$ représente la situation où l'anniversaire de la i -ème personne est le x_i -ème jour de l'année. L'évènement demandé est donné par

$$E = \{\bar{x} \in \Omega : x_i \neq x_j, \text{ pour tout } i \neq j\}.$$

C'est clair que $\#(E) = 0$, si $n > 365$, et $\#(E) = 365!/(365 - n)!$, si $n \leq 365$. Cela nous dit que $\mathbb{P}(E) = 0$ si $n > 365$, et

$$\mathbb{P}(E) = 1 - \frac{365!}{(365 - n)!365^n}.$$

si $n \leq 365$. \square

Exercice 129 *Formule de Poincaré, problème des rencontres*

1. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et soient $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ des événements. Montrer que, si A désigne la réunion de ces n événements, alors

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{i_1 < \dots < i_k} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}).$$

2. On tire sans remise n boules numérotées de 1 à n . Déterminer la probabilité p_n pour qu'il existe un entier k tel que la boule portant le numéro k soit tirée au tirage numéro k .
3. Déterminer la limite de p_n quand n tend vers l'infini.

Proof.

1. On va procéder par récurrence sur n . Si $n = 1$, il n'y a rien à démontrer. On suppose que l'identité de Poincaré est vérifiée pour toute réunion de n éléments. Soient

$A_1, \dots, A_{n+1} \in \mathcal{A}$ des événements, et soit $B = \cup_{i=1}^n A_i$. Alors,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right) &= \mathbb{P}(B \cup A_{n+1}) = \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A_{n+1}) - \mathbb{P}(B \cap A_{n+1}) \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{i_1 < \dots < i_k} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}) + \mathbb{P}(A_{n+1}) \\ &\quad - \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{i_1 < \dots < i_k} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k} \cap A_{n+1}) \\ &= \sum_{k'=1}^{n+1} (-1)^{k'+1} \sum_{j_1 < \dots < j_{k'}} \mathbb{P}(A_{j_1} \cap \dots \cap A_{j_{k'}}), \end{aligned}$$

où l'on a utilisé que

$$B \cap A_{n+1} = \bigcup_{i=1}^n (A_i \cap A_{n+1})$$

ainsi que l'hypothèse de la récurrence dans la troisième égalité. Dans la dernière égalité on a utilisé que les opérandes dans la dernière somme avec $j_{k'} < n+1$ (et donc forcément $k' \leq n$) correspondent précisément aux opérandes dans la première somme du quatrième membre, $\mathbb{P}(A_{n+1})$ correspond au cas $k' = 1$ et $j_{k'} = n+1$, et que les opérandes dans la dernière somme avec $k' > 1$ et $j_{k'} = n+1$ coïncident exactement avec les opérandes avec $k = k' - 1$ et $(i_1, \dots, i_k) = (j_1, \dots, j_k)$ dans la dernière somme du quatrième membre.

2. L'univers de l'espace probabilisé est $\Omega_n = \mathbb{S}_n$, avec tribu $\mathcal{P}(\Omega_n)$. Cet espace est équiprobable. C'est clair que $\#(\Omega_n) = n!$. Un élément $\sigma \in \Omega_n$ représente la situation où l'on obtient la boule $\sigma(i)$ au i -ème tirage. Soit $A_i = \{\sigma \in \Omega_n : \sigma(i) = i\}$, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. L'évènement demandé est donné par

$$E_n = \bigcup_{i=1}^n A_i.$$

C'est facile à voir que $\#(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) = (n-k)!$, pour tous $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$. D'après la formule de Poincaré, on trouve alors que

$$p_n = \mathbb{P}(E_n) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{i_1 < \dots < i_k} \frac{(n-k)!}{n!} = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \binom{n}{k} \frac{(n-k)!}{n!} = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k!}.$$

3. On voit bien que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = - \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k!} = 1 - e^{-1}.$$

□

Exercice 130 Balles et paniers On a $r \in \mathbb{N}^*$ balles et n paniers numérotés de 1 à n , avec $n \geq 2$. On répondra aux questions dans les deux cas suivants :

- (C1) Les r balles sont discernables (par exemple, parce qu'elles sont de couleurs différentes).
(C2) Les r balles sont indiscernables.

1. Quel est le nombre de répartitions possibles (un panier peut contenir plusieurs balles) ? On suppose qu'on a équiprobabilité.
2. Quelle est la probabilité p_k qu'un panier fixé (par exemple, le premier panier) contienne exactement k balles, pour $k \in \llbracket 0, r \rrbracket$. Étudier aussi la monotonie de la suite $(p_k)_{k \in \{0, \dots, r\}}$.
3. On suppose que n et r tendent vers l'infini et que r/n tend vers λ . Montrer que chaque terme p_k admet une limite et calculer celle-ci.

Proof.

1. L'univers de l'espace probabilisé pour le cas (C1) est $\Omega_1 = \{f : \llbracket 1, r \rrbracket \rightarrow \llbracket 1, n \rrbracket\}$, avec tribu $\mathcal{P}(\Omega_1)$. Par ailleurs, l'univers de l'espace probabilisé pour le cas (C2) est $\Omega_2 = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{N}^n : \sum_{i=1}^n x_i = r\}$, avec tribu $\mathcal{P}(\Omega_2)$. Les deux espaces sont équiprobables. C'est clair que $\#(\Omega_1) = n^r$, tandis que

$$\#(\Omega_2) = \binom{r+n-1}{r}.$$

2. On suppose désormais que le panier fixé, qui contient précisément k balles, est le premier. L'évènement demandé pour le cas (C1) est

$$E_1 = \left\{ f \in \Omega_1 : \#(f^{-1}(\{1\})) = k \right\}.$$

C'est facile à voir que

$$\#(E_1) = \binom{r}{k} (n-1)^{r-k},$$

ce qui nous dit que

$$p_{k,1} = \mathbb{P}(E_1) = \binom{r}{k} \frac{(n-1)^{r-k}}{n^r}.$$

L'évènement demandé pour le cas (C2) est

$$E_2 = \{(x_1, \dots, x_n) \in \Omega_2 : x_1 = k\}.$$

C'est facile à voir que

$$\#(E_2) = \binom{r-k+n-2}{r-k},$$

ce qui nous dit que

$$p_{k,2} = \mathbb{P}(E_2) = \frac{r!(r-k+n-2)!(n-1)}{(r-k)!(r+n-1)!}.$$

En conséquence,

$$\frac{p_{k+1,1}}{p_{k,1}} = \frac{(r-k)}{(k+1)(n-1)},$$

et

$$\frac{p_{k+1,2}}{p_{k,2}} = \frac{r-k}{r-k+n-2},$$

pour $k \in \llbracket 0, r-1 \rrbracket$. Cela nous dit que, pour $k \in \llbracket 0, r-1 \rrbracket$, $p_{k+1,1} \geq p_{k,1}$ si et seulement si $k \leq (r-n+1)/n$, et $p_{k+1,2} \leq p_{k,2}$.

3. La formule de Stirling (voir l'exercice 11 de la fiche 1) et un calcul long mais élémentaire nous disent que

$$\lim_{\substack{n, r \rightarrow +\infty \\ r/n \rightarrow \lambda}} p_{k,1} = \frac{e^{-\lambda}}{k! \lambda^k} \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{n, r \rightarrow +\infty \\ r/n \rightarrow \lambda}} p_{k,2} = \frac{\lambda^k}{(1 + \lambda)^{k+1}}.$$

□

Exercice 131 *Problème du scrutin* Lors d'un vote opposant deux candidats A et B, A obtient a voix et B obtient b voix. On suppose que $a < b$. Quelle est la probabilité pour qu'au cours du dépouillement, B ait toujours été strictement en tête ?

Indication : représenter le dépouillement par un chemin du plan constitué de segments horizontaux ou verticaux de longueur 1 joignant l'origine au point de coordonnées (a, b) et compter le nombre de chemins situés strictement au dessus de la diagonale.

Proof. L'univers de l'espace probabilisé est

$$\Omega = \left\{ \bar{x} = (x_1, \dots, x_{a+b}) \in \{u, r\}^{a+b} : \#\{i : x_i = u\} = b \right\},$$

avec tribu $\mathcal{P}(\Omega)$. Cet espace est équiprobable. C'est clair que

$$\#\Omega = \frac{(a+b)!}{a!b!}.$$

Pour $\bar{x} \in \Omega$ et $i \in \llbracket 1, a+b \rrbracket$, on définit $N_{u,i}(\bar{x}) = \#\{j \in \llbracket 1, i \rrbracket : x_j = u\}$ et $N_{r,i}(\bar{x}) = \#\{j \in \llbracket 1, i \rrbracket : x_j = r\}$. Noter que $N_{u,i}(\bar{x}) + N_{r,i}(\bar{x}) = i$. L'évènement complémentaire de l'évènement demandé E est

$$\Omega \setminus E = \left\{ \bar{x} \in \Omega : \text{il existe } i \in \llbracket 1, a+b \rrbracket \text{ tel que } N_{u,i}(\bar{x}) = N_{r,i}(\bar{x}) \right\}.$$

Pour $\bar{x} \in \Omega \setminus E$, on définit

$$\iota(\bar{x}) = \min \left\{ i \in \llbracket 1, a+b \rrbracket : N_{u,i}(\bar{x}) = N_{r,i}(\bar{x}) \right\}.$$

C'est clair que $\iota(\bar{x})$ est pair. On définit l'application $\varphi : \Omega \setminus E \rightarrow \Omega \setminus E$ via $\varphi(\bar{x}) = \bar{y}$ avec

$$y_i = \begin{cases} r, & \text{si } x_i = u \text{ et } i \leq \iota(\bar{x}), \\ u, & \text{si } x_i = r \text{ et } i \leq \iota(\bar{x}), \\ x_i, & \text{si } i > \iota(\bar{x}). \end{cases}$$

On laisse au lecteur la vérification simple du fait que φ est une application bijective. En outre, on définit $F = \{\bar{x} \in \Omega \setminus E : x_1 = r\}$ et $G = \{\bar{x} \in \Omega \setminus E : x_1 = u\}$. On note que φ établit une bijection entre F et G , et

$$F = \left\{ \bar{x} \in \Omega : x_1 = r \right\}.$$

Cela implique que $\#\Omega \setminus E = 2\#(F)$. Par ailleurs, c'est facile à voir que

$$\#(F) = \frac{(a+b-1)!}{(a-1)!b!},$$

ce qui implique que

$$\#(E) = \frac{(a+b-1)!(b-a)}{a!b!} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(E) = \frac{(b-a)}{(a+b)}.$$

□

8.2 Probabilités conditionnelles et indépendance

Exercice 132 *Indépendance de deux évènements* Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et soient $A, B \in \mathcal{A}$ deux évènements. Soient \mathcal{A} et \mathcal{B} les tribus engendrées par A et B , respectivement, *i.e.* $\mathcal{A} = \{\emptyset, A, \Omega \setminus A, \Omega\}$ et $\mathcal{B} = \{\emptyset, B, \Omega \setminus B, \Omega\}$. Montrer que A et B sont indépendants si et seulement si pour tout $C \in \mathcal{A}$ et pour tout $D \in \mathcal{B}$, $\mathbb{P}(C \cap D) = \mathbb{P}(C)\mathbb{P}(D)$.

Proof. C'est clair que, si pour tout $C \in \mathcal{A}$ et pour tout $D \in \mathcal{B}$, $\mathbb{P}(C \cap D) = \mathbb{P}(C)\mathbb{P}(D)$, alors A et B sont indépendants. On va démontrer la réciproque. On suppose alors que A et B sont indépendants. Si C est l'ensemble vide, alors

$$\mathbb{P}(C \cap D) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0 = 0 \cdot \mathbb{P}(D) = \mathbb{P}(\emptyset)\mathbb{P}(D) = \mathbb{P}(C)\mathbb{P}(D),$$

et de même si D est l'ensemble vide. Si C est Ω , alors

$$\mathbb{P}(C \cap D) = \mathbb{P}(D) = \mathbb{P}(\Omega)\mathbb{P}(D) = \mathbb{P}(C)\mathbb{P}(D),$$

et de même si D est Ω . Si $\{C, D\} = \{A, B\}$, le résultat $\mathbb{P}(C \cap D) = \mathbb{P}(C)\mathbb{P}(D)$ suit directement de l'indépendance de A et de B . Si $\{C, D\} = \{A, \Omega \setminus B\}$, alors

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(C \cap D) &= \mathbb{P}(A \setminus (A \cap B)) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) \\ &= \mathbb{P}(A)(1 - \mathbb{P}(B)) = \mathbb{P}(C)\mathbb{P}(D). \end{aligned}$$

Le même argument montre le cas $\{C, D\} = \{B, \Omega \setminus A\}$. Finalement, le cas $\{C, D\} = \{\Omega \setminus A, \Omega \setminus B\}$ est donné par

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(C \cap D) &= \mathbb{P}(\Omega \setminus (A \cup B)) = 1 - \mathbb{P}(A \cup B) = 1 - \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A \cap B) \\ &= 1 - \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = (1 - \mathbb{P}(A))(1 - \mathbb{P}(B)) = \mathbb{P}(C)\mathbb{P}(D). \end{aligned}$$

□

Exercice 133 *Indépendance d'une famille d'évènements* Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Considérons les propriétés suivantes

(P1) les évènements $(A_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathcal{A}^n$ sont indépendants ;

(P2) pour toute famille $(B_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathcal{A}^n$ telle que $B_i \in \{A_i, \Omega \setminus A_i\}$,

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{1 \leq i \leq n} B_i\right) = \prod_{1 \leq i \leq n} \mathbb{P}(B_i);$$

(P3) pour toute famille $(B_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathcal{A}^n$ telle que $B_i \in \{\emptyset, A_i, \Omega \setminus A_i, \Omega\}$,

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{1 \leq i \leq n} B_i\right) = \prod_{1 \leq i \leq n} \mathbb{P}(B_i).$$

Montrer que les propriétés (P1), (P2) et (P3) sont équivalentes.

Proof. Il s'agit d'une conséquence immédiate de l'exercice précédent et d'un argument par récurrence. □

Exercice 134 Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ une suite d'évènements indépendants.

1. Montrer que

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k\right) = 1 - \lim_{N \rightarrow +\infty} \prod_{k=0}^N \mathbb{P}(\Omega \setminus A_k).$$

2. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) $\mathbb{P}(\cup_{k \in \mathbb{N}} A_k) = 1$;
- (ii) $\sum_{k=0}^{+\infty} \ln(\mathbb{P}(\Omega \setminus A_k))$ diverge ;
- (iii) $\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_k)$ diverge.

Proof.

1. On remarque d'abord que la définition de probabilité nous dit que

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k\right) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^N A_k\right). \quad (20)$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^N A_k\right) &= \mathbb{P}\left(\Omega \setminus \left(\Omega \setminus \left(\bigcup_{k=0}^N A_k\right)\right)\right) = \mathbb{P}\left(\Omega \setminus \left(\bigcap_{k=0}^N (\Omega \setminus A_k)\right)\right) \\ &= 1 - \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^N (\Omega \setminus A_k)\right) = 1 - \prod_{k=0}^N \mathbb{P}(\Omega \setminus A_k), \end{aligned} \quad (21)$$

d'après l'exercice précédent. Le résultat suit de prendre la limite quand N tend vers $+\infty$ et (20).

2. Les identités dans (21) nous disent que la condition (i) est équivalente à

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \prod_{k=0}^N \mathbb{P}(\Omega \setminus A_k) = 0, \quad (iv)$$

ce qui est équivalent à

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^N \ln(\mathbb{P}(\Omega \setminus A_k)) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^N \ln(1 - \mathbb{P}(A_k)) = -\infty. \quad (v)$$

Cela nous dit en particulier que les conditions (i) et (ii) sont équivalentes. En outre, l'inégalité $\ln(1-x) \leq -x$, pour tout $x \in [0, 1[$, nous dit que (iii) implique (ii), tandis que la l'inégalité $\ln(1-x) \geq -2x$, pour tout $x \in [0, 1/2]$, nous dit que (ii) implique (iii). La preuve de ces deux inégalités suit de montrer les mêmes inégalités pour les dérivées respectives et que les fonctions initiales coïncident en $x = 0$.

□

Exercice 135 Dans une usine d'écrous, trois machines A, B et C produisent 25%, 35% et 40% du total de la production, respectivement. Elles produisent 5%, 4% et 2% de pièces défectueuses, respectivement. Un écrou est tiré au hasard et s'avère défectueux. Quelle est la probabilité qu'il ait été produit par la machine A ? B ? ou C ?

Proof. Soit \mathcal{A} (resp., \mathcal{B} , \mathcal{C}) l'évènement "l'écrou tiré au hasard a été produit par la machine A (resp., B, C)" et soit \mathcal{D} l'évènement "l'écrou tiré au hasard est défectueux". Alors $\mathbb{P}(\mathcal{A}) = 0,25$, $\mathbb{P}(\mathcal{B}) = 0,35$ et $\mathbb{P}(\mathcal{C}) = 0,4$. L'énoncé dit aussi que $\mathbb{P}(\mathcal{D}|\mathcal{A}) = 0,05$, $\mathbb{P}(\mathcal{D}|\mathcal{B}) = 0,04$ et $\mathbb{P}(\mathcal{D}|\mathcal{C}) = 0,02$. Pour simplifier, on va écrire $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}$, $\mathcal{A}_2 = \mathcal{B}$ et $\mathcal{A}_3 = \mathcal{C}$. Les probabilités demandées sont données par la formule de Bayes

$$\mathbb{P}(\mathcal{A}_i|\mathcal{D}) = \frac{\mathbb{P}(\mathcal{D}|\mathcal{A}_i)\mathbb{P}(\mathcal{A}_i)}{\sum_{j=1}^3 \mathbb{P}(\mathcal{D}|\mathcal{A}_j)\mathbb{P}(\mathcal{A}_j)},$$

pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$. Cela nous donne

$$\mathbb{P}(\mathcal{A}|\mathcal{D}) \simeq 0,36, \quad \mathbb{P}(\mathcal{B}|\mathcal{D}) \simeq 0,41 \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(\mathcal{C}|\mathcal{D}) \simeq 0,23.$$

□

Exercice 136 Une urne contient n boules noires et n boules rouges. On tire deux par deux sans remise, toutes les boules de l'urne. Quelle est la probabilité d'obtenir à chaque tirage deux boules de couleurs différentes ?

Proof. On peut supposer sans perte de généralité que les boules sont numérotées de 1 à $2n$, les boules impaires sont noires et les boules paires sont rouges. On suppose en plus que pour chaque tirage de deux boules, on tire d'abord une boule et après une autre boule. L'univers de l'espace probabilisé est

$$\Omega = \mathbb{S}_{2n},$$

avec tribu $\mathcal{P}(\Omega)$. Un élément $\sigma \in \mathbb{S}_{2n}$ représente la situation où l'on a tiré la $\sigma(i)$ -ème boule au i -ème tirage. Pour chaque $n \in \mathbb{Z}$, on note $\bar{n} \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ la classe de n . Cet espace est équiprobable. C'est clair que

$$\#(\Omega) = (2n)!.$$

L'évènement demandé est

$$E = \left\{ \sigma \in \Omega : \{\overline{\sigma(2j-1)}, \overline{\sigma(2j)}\} = \{\bar{0}, \bar{1}\}, \text{ pour tout } j \in \llbracket 1, n \rrbracket \right\}.$$

C'est facile à voir que $\#(E) = n!2^n$, ce qui nous dit que

$$\mathbb{P}(E) = \frac{2^n n!}{(2n)!}.$$

□

Exercice 137 On dispose de $N+1$ urnes numérotées de 0 à N . L'urne numéro k contient k boules rouges et $N-k$ boules noires. On tire une des urnes avec équiprobabilité, puis on procède avec cette urne à une série de n tirages avec remise.

1. Calculer la probabilité d'avoir choisi l'urne numéro 1 sachant qu'on a tiré n boules rouges.
2. Calculer la probabilité de tirer n boules rouges.
3. Calculer la probabilité de tirer une boule rouge au tirage $n+1$ sachant qu'on a déjà tiré n boules rouges.
4. Déterminer les limites des probabilités précédentes quand $N \rightarrow +\infty$.

Proof. Pour $k \in \llbracket 0, N \rrbracket$, on note U_k l'évènement "on tire la k -ème urne", et pour $n \in \mathbb{N}$, on note R_n l'évènement "on a obtenu n boules rouges lors de n tirages (avec remise)". L'énoncé nous dit que $\mathbb{P}(U_k) = 1/(N+1)$ et $\mathbb{P}(R_n|U_k) = (k/N)^n$.

1. Dans ce cas, la formule de Bayes nous dit que

$$\mathbb{P}(U_1|R_n) = \frac{\mathbb{P}(R_n|U_1)\mathbb{P}(U_1)}{\sum_{k=0}^N \mathbb{P}(R_n|U_k)\mathbb{P}(U_k)} = \frac{1}{\sum_{k=0}^N k^n}.$$

2. La probabilité demandé est $\mathbb{P}(R_n)$, que l'on calcule à partir de

$$\mathbb{P}(R_n) = \sum_{k=0}^N \mathbb{P}(R_n|U_k)\mathbb{P}(U_k) = \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^N \left(\frac{k}{N}\right)^n.$$

3. La probabilité demandé est précisément $\mathbb{P}(R_{n+1}|R_n)$. Par définition $R_{n+1} \cap R_n = R_{n+1}$, ce qui nous dit que

$$\mathbb{P}(R_{n+1}|R_n) = \frac{\mathbb{P}(R_{n+1} \cap R_n)}{\mathbb{P}(R_n)} = \frac{\mathbb{P}(R_{n+1})}{\mathbb{P}(R_n)} = \frac{1}{N} \frac{\sum_{k=0}^N k^{n+1}}{\sum_{k=0}^N k^n}.$$

4. C'est clair que

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(U_1|R_n) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sum_{k=0}^N k^n} = 0,$$

tandis que

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(R_n) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^N \left(\frac{k}{N}\right)^n = \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}.$$

Finalement,

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(R_{n+1}|R_n) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \frac{\sum_{k=0}^N k^{n+1}}{\sum_{k=0}^N k^n} = \frac{n+1}{n+2}.$$

□

Exercice 138 Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et soient $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ des événements indépendants. On suppose que $\mathbb{P}(A_k) = p_k$. Quelle est la probabilité p qu'aucun de ces événements ne soit réalisé ? Montrer que

$$p \leq e^{-\sum_{k=1}^n p_k}.$$

Proof. D'après l'exercice 8.2, on voit bien que

$$p = \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^n (\Omega \setminus A_k)\right) = \prod_{k=0}^n \mathbb{P}(\Omega \setminus A_k) = \prod_{k=0}^n (1 - \mathbb{P}(A_k)) = \prod_{k=0}^n (1 - p_k).$$

L'inégalité $1 - x \leq e^{-x}$, pour $x \in [0, 1]$, nous dit que

$$p \leq e^{-\sum_{k=1}^n p_k}.$$

□

Exercice 139 Pour tout entier $n \geq 2$ fixé, soit \mathbb{P}_n la probabilité uniforme sur l'ensemble $\{1, \dots, n\}$ et soit $\mathcal{DP}_n \subseteq \{1, \dots, n\}$ l'ensemble des diviseurs premiers de n . Pour tout diviseur m de n désignons par A_m le sous-ensemble de $\{1, \dots, n\}$ formé des multiples de m .

1. Montrer que $\mathbb{P}_n(A_m) = 1/m$.
2. Montrer que les A_p , où p parcourt les diviseurs premiers de n , sont des événements indépendants dans l'espace probabilisé $(\{1, \dots, n\}, \mathbb{P}_n)$.
3. En déduire que l'ensemble des entiers de $\{1, \dots, n\}$ premiers avec n a une probabilité

$$\prod_{p \in \mathcal{D}_n} \left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

En déduire le cardinal de l'ensemble des entiers de $\{1, \dots, n\}$ premiers avec n . Retrouver ainsi une formule d'Euler.

4. On considère maintenant l'espace $(\mathbb{N}^*, \mathcal{P}(\mathbb{N}^*))$. Soit $s > 1$.

(i) Montrer qu'il existe $\lambda_s \in \mathbb{R}$ tel que

$$\mathbb{P}_s(\{n\}) = \frac{\lambda_s}{n^s}$$

définisse une probabilité sur $(\mathbb{N}^*, \mathcal{P}(\mathbb{N}^*))$.

- (ii) Soit pour $m \in \mathbb{N}^*$, $A_m = \{n \in \mathbb{N}^* : m|n\}$. Montrer que $\mathbb{P}_s(A_m) = 1/m^s$.
- (iii) Montrer que les A_p , où p parcourt l'ensemble $\mathcal{N}\mathcal{P}$ des nombres premiers, sont des événements indépendants dans $(\mathbb{N}^*, \mathcal{P}(\mathbb{N}^*), \mathbb{P}_s)$.
- (iv) Montrer que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} = \frac{1}{\prod_{p \in \mathcal{N}\mathcal{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)}.$$

- (v) Existe-t-il une probabilité \mathbb{Q} sur $(\mathbb{N}^*, \mathcal{P}(\mathbb{N}^*))$ telle que pour tout $m \geq 1$, $\mathbb{Q}(A_m) = 1/m$?

Proof.

1. Le résultat suit directement des identités

$$\llbracket 1, n \rrbracket = \bigsqcup_{k=0}^{m-1} (A_m + k) \text{ et } \#(A_m + k) = \#(A_m),$$

pour tout $k \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket$, où $A_m + k = \{x + k : x \in A_m\}$.

2. Il suffit de démontrer que $A_p \cap A_q = A_{pq}$, pour tous $p, q \in \mathbb{N}$ diviseurs de n avec $\text{PGCD}(p, q) = 1$, ce qui suit de la définition.
3. La probabilité demandé suit directement de l'égalité

$$\{m \in \llbracket 1, n \rrbracket : \text{PGCD}(m, n) = 1\} = \bigcap_{p \in \mathcal{D}_n} (\llbracket 1, n \rrbracket \setminus A_p),$$

qui est un conséquence des définitions. Le cardinal de l'ensemble des entiers de $\{1, \dots, n\}$ premiers avec n est alors

$$\varphi(n) = \#\{m \in \llbracket 1, n \rrbracket : \text{PGCD}(m, n) = 1\} = n \prod_{p \in \mathcal{D}_n} (\llbracket 1, n \rrbracket \setminus A_p).$$

4. (i) On remarque d'abord que la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$$

converge absolument pour $s > 1$. Soit λ_s^{-1} la somme de cette série. Alors,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}_s(\{n\}) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda_s}{n^s} = \lambda_s \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} = 1.$$

(ii) On voit bien que

$$\mathbb{P}_s(A_m) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda_s}{m^s k^s} = \frac{\lambda_s}{m^s} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^s} = \frac{1}{m^s}.$$

(iii) Il suffit de démontrer que $A_p \cap A_q = A_{pq}$, pour tous $p, q \in \mathbb{N}$ avec $\text{PGCD}(p, q) = 1$, ce qui suit de la définition.

(iv) Le résultat suit directement de l'identité

$$\bigcap_{p \in \mathcal{N}} (\mathbb{N}^* \setminus A_p) = \{1\},$$

ainsi que de l'exercice 8.2.

(v) Non. S'il existait une telle probabilité \mathbb{Q} , alors l'exercice 8.2 nous dirait que

$$\mathbb{Q}\left(\bigcup_{n=n_0}^{+\infty} A_n\right) = 1,$$

pour tout $n_0 \in \mathbb{N}^*$. En outre, pour tout élément $N \in \mathbb{N}^*$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $N \notin A_n$, pour tout $n \geq n_0$. En conséquence, $\mathbb{Q}(\{N\}) = 0$, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, ce qui est absurde.

□

8.3 Variables discrètes

Exercice 140 *Comment jouer à pile ou face avec une pièce biaisée ?* On considère une pièce ayant une probabilité $p \in]0, 1[$ de tomber sur face (F). La probabilité de tomber sur pile (P) est donc $1 - p$. On lance la pièce deux fois. Si on obtient FP, on pose $X = 1$ et si on obtient PF, on pose $X = 0$. Dans les deux autres cas, on recommence jusqu'à obtenir FP ou PF et on définit alors X comme précédemment. Déterminer la loi de X .

Proof. L'univers de l'espace probabilisé est

$$\Omega = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{PP, FF\}^n \times \{FP, PF\},$$

avec tribu $\mathcal{P}(\Omega)$. On a décidé d'exclure les éléments

$$\omega \in \{PP, FF\}^{\mathbb{N}},$$

puisque, de façon intuitive, la probabilité de l'évènement qu'ils définissent est nulle. En effet, notre intuition nous dit qu'il faut définir $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ comme la seule application σ -additive telle que

$$\mathbb{P}\left(\{(\omega_0, FP)\}\right) = \mathbb{P}\left(\{(\omega_0, PF)\}\right) = p^{1+2|\omega_0|}(1-p)^{1+2(n-|\omega_0|)},$$

pour tout $\omega_0 = (w_1, \dots, w_n) \in \{PP, FF\}^n$ et $n \in \mathbb{N}$, où

$$|\omega_0| = \#\left(\{i \in \llbracket 1, n \rrbracket : w_i = FF\}\right).$$

Il suffit de montrer que \mathbb{P} est une probabilité, *i.e.* $\mathbb{P}(\Omega) = 1$. On voit bien que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\Omega) &= \sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{P}(\{\omega\}) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{\omega_0 \in \{PP, FF\}^n} \left(\mathbb{P}\left(\{(\omega_0, FP)\}\right) + \mathbb{P}\left(\{(\omega_0, PF)\}\right) \right) \\ &= 2 \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{\omega_0 \in \{PP, FF\}^n} p^{1+2|\omega_0|}(1-p)^{1+2(n-|\omega_0|)} \\ &= 2 \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^{1+2k}(1-p)^{1+2(n-k)} = 2p(1-p) \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^{2k}(1-p)^{2(n-k)} \\ &= 2p(1-p) \sum_{n \in \mathbb{N}} (p^2 + (1-p)^2)^n = 2p(1-p) \sum_{n \in \mathbb{N}} (1 - 2p(1-p))^n \\ &= \frac{2p(1-p)}{1 - (1 - 2p(1-p))} = 1, \end{aligned}$$

i.e. \mathbb{P} est une probabilité.

On pose

$$\Omega_{FP} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{PP, FF\}^n \times \{FP\} \text{ et } \Omega_{PF} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{PP, FF\}^n \times \{PF\}.$$

C'est clair que $\mathbb{P}(\Omega_{FP}) = \mathbb{P}(\Omega_{PF}) = 1/2$. En effet, si l'on considère l'application $\varphi : \Omega \rightarrow \Omega$ donnée par $\varphi(\omega_0, PF) = (\omega_0, FP)$ et $\varphi(\omega_0, FP) = (\omega_0, PF)$, pour tout $\omega_0 \in \cup_{n \in \mathbb{N}} \{PP, FF\}^n$. C'est clair que φ est bijectif ($\varphi^{-1} = \varphi$), $\varphi(\Omega_{PF}) = \Omega_{FP}$ et que $\mathbb{P}(\varphi(X)) = \mathbb{P}(X)$, pour tout $X \subseteq \Omega$.

La variable aléatoire X est définie par

$$X(\omega_0, FP) = 1 \text{ et } X(\omega_0, PF) = 0,$$

pour tout $\omega_0 \in \cup_{n \in \mathbb{N}} \{PP, FF\}^n$. On veut calculer $p_X(a) = \mathbb{P}(X = a)$, pour tout $a \in \mathbb{R}$, *i.e.* $p_X(a) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = a\})$. Si $a \notin \{0, 1\}$, $p_X(a) = 0$. En outre,

$$p_X(0) = \mathbb{P}(\Omega_{PF}) = 1/2 \text{ et } p_X(1) = \mathbb{P}(\Omega_{FP}) = 1/2.$$

□

Exercice 141 *Lancer de pièces* On lance une pièce 5 fois. On appelle X le nombre de faces obtenus. On appelle Y le nombre de sous-suites maximales de faces dans le 5-uplet de résultat (par exemple, FFPFP comporte deux sous-suites maximales de faces, FPFPF en comporte 3). On appelle Z la longueur de la plus grande sous-suite maximale de faces. Donner les lois de X , Y , Z , (X, Y) , (X, Z) , (Y, Z) et (X, Y, Z) .

Proof. L'univers de l'espace probabilisé est

$$\Omega = \{P, F\}^5,$$

avec tribu $\mathcal{P}(\Omega)$. On note $\bar{x} = (x_1, \dots, x_5)$ un élément de Ω , où $x_i \in \{P, F\}$. Cet espace est équiprobable. C'est clair que $\#\Omega = 2^5$.

La variable aléatoire X est définie par

$$X(\bar{x}) = \#\{i \in \llbracket 1, 5 \rrbracket : x_i = F\}.$$

On voit bien que $p_X(a) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = a\}) = 0$, si $a \in \mathbb{R} \setminus \llbracket 0, 5 \rrbracket$. En outre,

$$p_X(0) = p_X(5) = \frac{1}{2^5}, p_X(1) = p_X(4) = \frac{5}{2^5}, \text{ et } p_X(2) = p_X(3) = \frac{1}{2^5} \binom{5}{2}.$$

On dit que $\bar{x} \in \Omega$ admet une *sous-suite maximale de faces de longueur* $n \in \llbracket 1, 5 \rrbracket$ qui commence en $i \in \llbracket 1, 6 - n \rrbracket$ si

- (i) $x_{i+j-1} = F$, pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$,
- (ii) $i = 1$, ou $i > 1$ et $x_{i-1} = P$,
- (iii) $i + n > 5$, ou $i + n \leq 5$ et $x_{i+n} = P$.

On appelle l'indice i ci-dessus le *début d'une sous-suite maximale de faces* de \bar{x} . Soit $\mathcal{D}_n(\bar{x})$ l'ensemble des débuts des sous-suites maximales de faces de longueur n de $\bar{x} \in \Omega$. La variable aléatoire Y est donnée par

$$Y(\bar{x}) = \#\left(\bigcup_{n=1}^5 \mathcal{D}_n(\bar{x})\right),$$

tandis que

$$Z(\bar{x}) = \max\left(\{n \in \llbracket 1, 5 \rrbracket : \mathcal{D}_n(\bar{x}) \neq \emptyset\} \cup \{0\}\right).$$

On voit bien que $p_Y(b) = 0$, si $b \in \mathbb{R} \setminus \llbracket 0, 3 \rrbracket$,

$$p_Y(0) = p_Y(3) = \frac{1}{2^5} \text{ et } p_Y(1) = p_Y(2) = \frac{15}{2^5}.$$

C'est clair que $p_Z(c) = 0$, si $c \in \mathbb{R} \setminus \llbracket 0, 5 \rrbracket$,

$$p_Z(0) = p_Z(5) = \frac{1}{2^5}, p_Z(1) = \frac{12}{2^5}, p_Z(2) = \frac{11}{2^5}, p_Z(3) = \frac{5}{2^5} \text{ et } p_Z(4) = \frac{2}{2^5}.$$

Par rapport au $p_{(X,Y)}(a, b) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = a \text{ et } Y(\omega) = b\})$, on voit bien que $p_{(X,Y)}(a, b) = 0$, si $(a, b) \notin (\llbracket 1, 5 \rrbracket \times \llbracket 1, 3 \rrbracket \setminus \{(0, 0)\})$ ou $b > 3 - |a - 3|$,

$$\begin{aligned} p_{(X,Y)}(0, 0) &= p_{(X,Y)}(3, 3) = \frac{1}{2^5}, p_{(X,Y)}(a, 1) = \frac{6 - a}{2^5}, \\ p_{(X,Y)}(2, 2) &= p_{(X,Y)}(3, 2) = \frac{6}{2^5} \text{ et } p_{(X,Y)}(4, 2) = \frac{3}{2^5}, \end{aligned}$$

pour tout $a \in \llbracket 1, 5 \rrbracket$.

Par rapport au $p_{(X,Z)}(a, c) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = a \text{ et } Z(\omega) = c\})$, on voit bien que $p_{(X,Z)}(a, c) = 0$, si $(a, c) \notin (\llbracket 1, 4 \rrbracket \times \llbracket 1, 4 \rrbracket \setminus \{(0, 0), (5, 5)\})$ ou $a < c < a - 2$,

$$\begin{aligned} p_{(X,Z)}(0, 0) &= p_{(X,Z)}(3, 1) = p_{(X,Z)}(4, 2) = \frac{1}{2^5}, p_{(X,Z)}(a, a) = \frac{6 - a}{2^5}, \\ p_{(X,Z)}(2, 1) &= p_{(X,Z)}(3, 2) = \frac{6}{2^5} \text{ et } p_{(X,Z)}(4, 3) = \frac{2}{2^5} \end{aligned}$$

pour tout $a \in \llbracket 1, 5 \rrbracket$.

Par rapport au $p_{(Y,Z)}(b, c) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : Y(\omega) = b \text{ et } Z(\omega) = c\})$, on voit bien que $p_{(Y,Z)}(b, c) = 0$, si $(b, c) \notin (\llbracket 1, 2 \rrbracket \times \llbracket 1, 3 \rrbracket \setminus \{(0, 0), (3, 1), (1, 4), (1, 5)\})$,

$$p_{(Y,Z)}(0, 0) = p_{(Y,Z)}(3, 1) = \frac{1}{2^5}, p_{(X,Y)}(1, c) = \frac{6-c}{2^5}, p_{(Y,Z)}(2, 3) = \frac{2}{2^5},$$

$$p_{(X,Z)}(2, 1) = \frac{6}{2^5} \text{ et } p_{(X,Z)}(2, 2) = \frac{7}{2^5},$$

pour tout $c \in \llbracket 1, 5 \rrbracket$.

Finalement, on rappelle que

$$p_{(X,Y,Z)}(a, b, c) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = a, Y(\omega) = b \text{ et } Z(\omega) = c\}).$$

On voit bien que $p_{(X,Y,Z)}(a, b, c) = 0$, sauf dans les cas suivants :

$$p_{(X,Y,Z)}(0, 0, 0) = p_{(X,Y,Z)}(4, 2, 2) = p_{(X,Y,Z)}(3, 3, 1) = \frac{1}{2^5}, p_{(X,Y,Z)}(a, 1, a) = \frac{6-a}{2^5},$$

$$p_{(X,Y,Z)}(3, 2, 2) = p_{(X,Y,Z)}(1, 2, 1) = \frac{6}{2^5} \text{ et } p_{(X,Y,Z)}(4, 2, 3) = \frac{2}{2^5},$$

pour tout $a \in \llbracket 1, 5 \rrbracket$. \square

Exercice 142 La variable aléatoire X suit la loi $B(2n, p)$. Déterminer la loi de $Y = |X - n|$.

Proof. C'est clair que le rang de Y est $\llbracket 0, n \rrbracket$, et que $\{Y = k\} = \{X = n - k\} \cup \{X = n + k\}$, pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Cela implique que

$$\mathbb{P}(\{Y = 0\}) = \mathbb{P}(\{X = n\}) = \binom{2n}{n} p^n (1-p)^n$$

et

$$\mathbb{P}(\{Y = k\}) = \mathbb{P}(\{X = n - k\}) + \mathbb{P}(\{X = n + k\}) = \binom{2n}{n-k} (p^{n-k} (1-p)^{n+k} + p^{n+k} (1-p)^{n-k}),$$

pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. \square

Exercice 143 La variable aléatoire N suit la loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$, avec $n \geq 2$ entier. Déterminer la loi de $X = \cos(N\pi)$.

Proof. Soit $m = \lfloor n/2 \rfloor$ la partie entière de $n/2$. C'est clair que le rang de X est $\{\pm 1\}$, et que $\{X = 1\} = \cup_{k=1}^m \{N = 2k\}$. Cela implique que

$$\mathbb{P}(\{X = 1\}) = \sum_{k=1}^m \mathbb{P}(\{N = 2k\}) = \frac{m}{n} \text{ et } \mathbb{P}(\{X = -1\}) = 1 - \mathbb{P}(\{X = 1\}) = \frac{n-m}{n}.$$

\square

Exercice 144

1. Soit X une variable aléatoire sur un espace probabilisé fini. On définit les variables aléatoires $X^+ = \max(X, 0)$ et $X^- = \max(-X, 0)$.

(i) Exprimer X et $|X|$ à l'aide de X^+ et X^- .

- (ii) En déduire l'inégalité $|E[X]| \leq E[|X|]$.
2. On suppose que X est à valeurs dans $\{-1, 0, 1\}$ et on définit $\alpha = E[X]$ et $\beta = E[|X|]$.
- (i) Montrer que $|\alpha| \leq \beta \leq 1$.
- (ii) Déterminer la loi de X à l'aide de α et β .

Proof.

1. (i) C'est clair que $X = X^+ - X^-$ et $|X| = X^+ + X^-$.
- (ii) On voit bien que

$$|E[X]| = |E[X^+ - X^-]| = |E[X^+] - E[X^-]| \leq |E[X^+]| + |E[X^-]| = E[X^+] + E[X^-] = E[|X|].$$

2. (i) L'inégalité $|\alpha| \leq \beta$ est précisément $|E[X]| \leq E[|X|]$. En outre, comme $|X| \leq 1$, on conclut que $E[|X|] \leq 1$, *i.e.* $\beta \leq 1$.
- (ii) On voit bien que $\beta = E[|X|] = \mathbb{P}(\{X = 1\}) + \mathbb{P}(\{X = -1\})$ et que $\alpha = E[X] = \mathbb{P}(\{X = 1\}) - \mathbb{P}(\{X = -1\})$. Cela nous dit que

$$\mathbb{P}(\{X = 1\}) = \frac{\alpha + \beta}{2}, \mathbb{P}(\{X = -1\}) = \frac{\beta - \alpha}{2} \text{ et } \mathbb{P}(\{X = 0\}) = 1 - \beta.$$

□

Exercice 145 Une urne renferme des boules blanches et des boules noires en proportions respectives p et $1 - p$ avec $0 < p < 1$. On effectue des tirages avec remise. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. On note X_n la variable aléatoire donnée par le nombre de tirages nécessaires à l'obtention de la n -ème boule blanche.

1. Quelle est la loi de X_1 ? Calculer la fonction génératrice G_1 de X_1 .
2. On pose $Y_1 = X_1$ et $Y_n = X_n - X_{n-1}$ pour tout $n > 1$. Montrer que
- (i) Pour tout $n \geq 0$, la variable aléatoire Y_n a même loi que X_1 .
- (ii) Pour tout $n > 0$, X_{n-1} est indépendante de Y_n .
3. En déduire la fonction génératrice G_n de X_n . Que vaut $E[X_n]$?
4. Déterminer la loi de X_n . Comparer $\mathbb{P}(X_n = k)$ et $\mathbb{P}(X_n = k + 1)$. Tracer le diagramme en bâtons de la loi de X_n .

Proof.

1. C'est clair que X_1 suit une loi géométrique avec paramètre p , *i.e.* $\mathbb{P}(\{X_1 = k\}) = p(1 - p)^{k-1}$ si $k \in \mathbb{N}^*$, et zéro sinon. En conséquence, sa fonction génératrice est donnée par

$$G_1(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\{X_1 = k\})t^k = \frac{p}{1-p} \sum_{k=1}^{+\infty} (t - pt)^k = \frac{pt}{pt - t + 1}.$$

2. (i) Il s'agit d'une conséquence directe de l'énoncé.
- (ii) Il s'agit d'une conséquence directe de l'énoncé.
3. Comme $X_n = X_{n-1} + Y_n$, et les variables aléatoires X_{n-1} et Y_n sont indépendantes, on conclut que G_n est le produit des fonctions génératrices de X_{n-1} et de Y_n , *i.e.* $G_n(t) = G_{n-1}(t)G_1(t)$, vu que Y_n a la même loi que X_1 . Cela implique que $G_n(t) = G_1(t)^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. En conséquence, d'après l'égalité $E[X_n] = G'_n(1)$, on trouve que

$$E[X_n] = \frac{n}{p}.$$

4. Comme X_n a la fonction génératrice d'une variable aléatoire qui suit la loi de Pascal avec paramètres n et p , on voit bien que le rang de X_n est $\mathbb{N}_{\geq n}$ et

$$\mathbb{P}(\{X_n = k\}) = \binom{k-1}{n-1} p^n (1-p)^{k-n},$$

pour tout $k \in \mathbb{N}_{\geq n}$. C'est clair que $\mathbb{P}(\{X_n = k+1\})/\mathbb{P}(\{X_n = k\}) = p(1-p)k/(k-n+1)$, pour tout $k \in \mathbb{N}_{\geq n}$. On laisse le diagramme en bâtons de la loi de X_n au lecteur.

□

Exercice 146 *Loi sans mémoire* Soit T une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{N} telle que

$$\mathbb{P}(\{T \geq n+k\}|\{T \geq n\}) = \mathbb{P}(\{T \geq k\}),$$

pour tous $n, k \in \mathbb{N}$. Déterminer la loi de T .

Proof. Soit $f(n) = \mathbb{P}(\{T \geq n\})$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme le rang de T est \mathbb{N} , $f(0) = 1$. L'inclusion $\{T \geq m\} \subseteq \{T \geq n\}$, pour tous $n, m \in \mathbb{N}$ tels que $n \leq m$, nous dit que $f : \mathbb{N} \rightarrow [0, 1]$ est une fonction décroissante. Cela implique que, si $f(n_0) = 0$ pour $n_0 \in \mathbb{N}^*$, alors $f(m) = 0$, pour tout entier $m \geq n_0$.

Si $f(1) = 0$, alors $f(n) = 0$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, *i.e.* T suit une loi uniforme sur $\{0\}$. Bien que la définition standard de la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}(\{T \geq n+k\}|\{T \geq n\})$ n'ait pas de sens *a priori*, car $\mathbb{P}(\{T \geq n\}) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on peut considérer que $\mathbb{P}(\{T \geq n+k\}|\{T \geq n\}) = 1$ est une propriété qui devrait être vérifiée pour tout $n \in \mathbb{N}$ même si $\mathbb{P}(\{T \geq n\}) = 0$.

On suppose désormais que $f(1) \neq 0$. D'abord, on va démontrer que $f(n) \neq 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose alors que $\{n \in \mathbb{N}^* : f(n) = 0\} \neq \emptyset$ et soit $n_0 = \min\{n \in \mathbb{N}^* : f(n) = 0\}$. C'est clair que $n_0 > 1$. On va montrer que $f(n_0) \neq 0$, ce qui est absurde. En effet, on a $\{T \geq n_0\} \subseteq \{T \geq 1\}$ et

$$\begin{aligned} f(n_0) &= \mathbb{P}(\{T \geq n_0\}) = \mathbb{P}(\{T \geq n_0\} \cap \{T \geq 1\}) = \mathbb{P}(\{T \geq n_0\}|\{T \geq 1\})\mathbb{P}(\{T \geq 1\}) \\ &= \mathbb{P}(\{T \geq (n_0-1)+1\}|\{T \geq 1\})\mathbb{P}(\{T \geq 1\}) \\ &= \mathbb{P}(\{T \geq n_0-1\})\mathbb{P}(\{T \geq 1\}) = f(n_0-1)f(1) \neq 0, \end{aligned}$$

car $f(n_0-1), f(1) \neq 0$. En conséquence, $f(n) \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Dans ce cas, la propriété indiquée dans l'énoncé équivaut à dire que $f(n+m) = f(n)f(m)$, pour tous $n, m \in \mathbb{N}$. En effet, comme $\{T \geq n+m\} \subseteq \{T \geq n\}$ pour tous $n, m \in \mathbb{N}$, alors

$$\begin{aligned} f(m) &= \mathbb{P}(\{T \geq m\}) = \mathbb{P}(\{T \geq n+m\}|\{T \geq n\}) = \frac{\mathbb{P}(\{T \geq n+m\} \cap \{T \geq n\})}{\mathbb{P}(\{T \geq n\})} \\ &= \frac{\mathbb{P}(\{T \geq n+m\})}{\mathbb{P}(\{T \geq n\})} = \frac{f(n+m)}{f(n)}. \end{aligned}$$

En conséquence, $f(n) = f(1)^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On remarque que $f(1) \in]0, 1[$, puisque le cas $f(1) = 1$ implique que $f(n) = 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, mais la limite de $f(n)$ vaut zéro quand n tend vers $+\infty$. Si $\alpha = f(1) \in]0, 1[$, alors

$$\mathbb{P}(\{T = n\}) = \mathbb{P}(\{T \geq n\}) - \mathbb{P}(\{T \geq n+1\}) = \alpha^n(1-\alpha),$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. Il s'agit d'une variable aléatoire qui suit la loi géométrique avec paramètre $1-\alpha$. □

Exercice 147 Boules Une urne contient N boules dont N_1 portent le numéro 1, N_2 portent le numéro 2 et N_3 portent le numéro 3. On fait un tirage de n boules avec remise. Soit X_i le nombre de boules tirées qui portent le numéro i et $X = (X_1, X_2, X_3)$.

1. Donner la loi de X .
2. Donner la loi de X_i pour $1 \leq i \leq 3$.
3. Donner la loi de (X_1, X_2) .
4. On note Y_r la variable aléatoire valant 1 si l'on tire une boule portant le numéro 1 au r -ème tirage et 0 sinon. On note Z_r la variable aléatoire valant 1 si on tire une boule portant le numéro 2 au r -ème tirage et 0 sinon.
 - (i) Exprimer X_1 , X_2 et X_3 en fonction des $(Y_r)_{1 \leq r \leq n}$ et des $(Z_r)_{1 \leq r \leq n}$.
 - (ii) Calculer l'espérance de X_1 , la variance de X_1 et la covariance de (X_1, X_2) .

Traiter les mêmes questions pour un tirage sans remise.

Proof.

1. Pour la cas avec remise, le même argument que pour le calcul de la fonction de masse d'une variable aléatoire qui suit la loi binomiale nous dit que

$$\mathbb{P}(\{X = (x_1, x_2, x_3)\}) = \frac{n!}{x_1!x_2!x_3!} \left(\frac{N_1}{N}\right)^{x_1} \left(\frac{N_2}{N}\right)^{x_2} \left(\frac{N_3}{N}\right)^{x_3},$$

pour tout $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{N}^3$ tel que $x_1 + x_2 + x_3 = n$. Pour la cas sans remise, le même argument que pour le calcul de la fonction de masse d'une variable aléatoire qui suit la loi hypergéométrique nous dit que

$$\mathbb{P}(\{X = (x_1, x_2, x_3)\}) = \frac{\binom{N_1}{x_1} \binom{N_2}{x_2} \binom{N_3}{x_3}}{\binom{N}{n}},$$

pour tout $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{N}^3$ tel que $x_1 + x_2 + x_3 = n$ et $x_i \leq N_i$, pour tout $i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$.

2. Pour la cas avec remise, on voit bien que X_i suit une loi binomiale avec paramètres n et N_i/N , pour tout $i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$, *i.e.* le rang de X_i est $\llbracket 0, n \rrbracket$ et

$$\mathbb{P}(\{X_i = x_i\}) = \binom{n}{x_i} \left(\frac{N_i}{N}\right)^{x_i} \left(\frac{N - N_i}{N}\right)^{n-x_i},$$

pour tout x_i dans le rang de X_i . Pour la cas sans remise, on voit bien que X_i suit une loi hypergéométrique avec paramètres N , N_i et n , pour tout $i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$, *i.e.* le rang de X_i est $\llbracket \max(N_i + n - N, 0), \min(N_i, n) \rrbracket$ et

$$\mathbb{P}(\{X_i = x_i\}) = \frac{\binom{N_i}{x_i} \binom{N - N_i}{n - x_i}}{\binom{N}{n}},$$

pour tout x_i dans le rang de X_i .

3. On va donner simultanément la réponse pour les cas avec et sans remise. Comme $X_3 = n - X_1 - X_2$, on voit bien que

$$\mathbb{P}(\{(X_1, X_2) = (x_1, x_2)\}) = \mathbb{P}(\{X = (x_1, x_2, n - x_1 - x_2)\}),$$

pour tout $(x_1, x_2) \in \mathbb{N}^2$ tel que $(x_1, x_2, n - x_1 - x_2)$ soit dans le rang de X .

4. (i) On voit bien que

$$X_1 = \sum_{r=1}^n Y_r \text{ et } X_2 = \sum_{r=1}^n Z_r.$$

En outre, $X_3 = n - X_1 - X_2$. Cette réponse est valable pour les cas avec et sans remise.

(ii) Pour le cas avec remise, comme X_1 suit une loi binomiale avec paramètres n et N_1/N , on trouve que

$$E[X_1] = n \frac{N_1}{N} \text{ et } \text{Var}[X_1] = n \frac{N_1(N - N_1)}{N^2}.$$

Pour le cas sans remise, comme X_1 suit une loi hypergéométrique avec paramètres N , N_1 et n , on trouve que

$$E[X_1] = n \frac{N_1}{N} \text{ et } \text{Var}[X_1] = n \frac{N_1(N - N_1)(N - n)}{N^2(N - 1)}.$$

Pour calculer la covariance dans les deux cas, on utilise que $\text{Cov}(X_1, X_2) = E[X_1 X_2] - E[X_1]E[X_2]$, donc il suffit de calculer $E[X_1 X_2]$. Pour cela, on utilise que, dans les deux cas,

$$E[X_1 X_2] = \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n E[Y_r Z_s] = \sum_{\substack{r, s \in \llbracket 1, n \rrbracket \\ r \neq s}} E[Y_r Z_s],$$

où l'on a utilisé que $Y_r Z_r = 0$, pour tout $r \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Par ailleurs,

$$\begin{aligned} E[Y_r Z_s] &= \mathbb{P}(\{Y_r Z_s = 1\}) = \mathbb{P}(\{Y_r = 1\} \cap \{Z_s = 1\}) \\ &= \mathbb{P}(\{Y_r = 1\})\mathbb{P}(\{Z_s = 1\}) = E[Y_r]E[Z_s], \end{aligned}$$

pour tous $r \neq s$, où l'on a utilisé que les événements $\{Y_r = 1\}$ et $\{Z_s = 1\}$ sont indépendants si $r \neq s$. Pour calculer $E[Y_r]$ et $E[Z_s]$, on utilise que les variables aléatoires Y_r sont indépendantes et ont la même loi, et de même pour les variables aléatoires Z_s . En conséquence,

$$E[X_1] = \sum_{r=1}^n E[Y_r] = nE[Y_r] \text{ et } E[X_2] = \sum_{s=1}^n E[Z_s] = nE[Z_s],$$

pour tous $r, s \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Cela implique que $E[Y_r] = N_1/N$ et $E[Z_s] = N_2/N$, pour tous $r, s \in \llbracket 1, n \rrbracket$. En conséquence,

$$E[X_1 X_2] = n(n - 1) \frac{N_1 N_2}{N^2},$$

ce qui nous donne que

$$\text{Cov}(X_1, X_2) = E[X_1 X_2] - E[X_1]E[X_2] = -n \frac{N_1 N_2}{N^2}.$$

Cette réponse est valable pour les cas avec et sans remise.

□

Exercice 148 *Loi du maximum observé* Une urne contient N balles numérotées de 1 à N . On effectue n tirages avec remise. Soit X le plus grand nombre tiré lors des n tirages.

1. Donner la fonction de répartition de X .
2. Donner la loi de X .
3. Calculer $E[X]$ et donner un équivalent de $E[X]$ quand $N \rightarrow +\infty$

Proof.

1. On voit bien que l'univers de l'espace probabilisé est $\Omega = \llbracket 1, N \rrbracket^n$, avec tribu $\mathcal{P}(\Omega)$. Cet espace est équiprobable. On voit bien que $\#\Omega = N^n$ et que l'évènement demandé est $\{X \leq k\} = \llbracket 1, k \rrbracket^n$, pour tout $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$. Cela nous dit que

$$\mathbb{P}(\{X \leq k\}) = \left(\frac{k}{N}\right)^n,$$

pour tout $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$.

2. C'est clair que

$$\mathbb{P}(\{X = k\}) = \mathbb{P}(\{X \leq k\}) - \mathbb{P}(\{X \leq k-1\}) = \frac{k^n - (k-1)^n}{N^n},$$

pour tout $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$, et zéro sinon.

3. On voit bien que

$$\begin{aligned} E[X] &= \sum_{k=1}^n k \mathbb{P}(\{X = k\}) = \sum_{k=1}^n k \frac{k^n - (k-1)^n}{N^n} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{k^{n+1} - (k-1)^{n+1} - (k-1)^n}{N^n} = N - \sum_{k=1}^n \left(\frac{k-1}{N}\right)^n. \end{aligned}$$

Cela implique que $E[X]$ est équivalent à N quand $N \rightarrow +\infty$

□

Exercice 149 Clés Un homme possède n clés et veut ouvrir une porte. Une seule parmi les clés dont il dispose ouvre la porte. Il essaie les clés au hasard. Trouver l'espérance et la variance du nombre d'essais nécessaires si :

1. les clés qui ne marchent pas sont remises avec les autres ;
2. les clés qui ne marchent pas sont mises de côté.

Proof.

1. Dans ce cas X suit une loi géométrique avec paramètre $1/n$ et, en conséquence,

$$E[X] = n \text{ et } \text{Var}[X] = n(n-1).$$

2. C'est clair que le rang de X est $\llbracket 1, n \rrbracket$. Dans ce cas, on voit bien que

$$\mathbb{P}(\{X = 1\}) = \frac{1}{n}.$$

On suppose désormais que $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$. Dans ce cas, la loi de X est déterminée par le même argument que l'on utilise pour calculer la valeur d'une loi géométrique en k en remplaçant la valeur de la loi binomiale avec paramètres $k-1$ et $1/n$ en 0 par une loi hypergéométrique avec paramètres n , 1 et $k-1$ en 0. Plus précisément, si $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$, soit A l'évènement "On n'a pas tiré la clé qui ouvre la porte lors des premiers $k-1$

essais". Alors $\{X = k\} \subseteq A$ et $A = \{Y = 0\}$ pour Y une variable aléatoire qui suit une loi hypergéométrique avec paramètres n , 1 et $k - 1$, ce qui nous dit que

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\{Y = 0\}) = \frac{\binom{1}{0} \binom{n-1}{k-1}}{\binom{n}{k-1}}.$$

En conséquence,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\{X = k\}) &= \mathbb{P}(\{X = k\} \cap A) = \mathbb{P}(\{X = k\} | A) \mathbb{P}(A) \\ &= \frac{1}{n-k+1} \frac{\binom{1}{0} \binom{n-1}{k-1}}{\binom{n}{k-1}} = \frac{1}{n}, \end{aligned}$$

pour tout $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$. Cela implique que X suit une loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$. En conséquence,

$$E[X] = \frac{n+1}{2} \text{ et } \text{Var}[X] = \frac{n^2-1}{12}.$$

□

Exercice 150 *Poisson(s)* Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de lois de Poisson de paramètre a et b .

1. Déterminer la loi de la variable aléatoire $S = X + Y$.
2. Déterminer la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}(\{X = k\} | \{S = n\})$ pour tout couple (n, k) d'entiers naturels.
3. (Facultatif) Soit $r \geq 1$ un entier et $(X_k)_{k=1, \dots, r+1}$ des variables aléatoires indépendantes de lois de Poisson de paramètres respectifs a_k . Donner la loi conditionnelle de (X_1, \dots, X_r) sachant $\{X_1 + \dots + X_{r+1} = n\}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Proof.

1. Comme $S = X + Y$, et les variables aléatoires X et Y sont indépendantes, on conclut que la fonction génératrice G_S de S est le produit des fonctions génératrices G_X de X et G_Y de Y , *i.e.* $G_S(t) = G_X(t)G_Y(t)$. Dans ce cas, $G_X(t) = e^{a(t-1)}$ et $G_Y(t) = e^{b(t-1)}$, ce qui nous dit que $G_S(t) = e^{(a+b)(t-1)}$, *i.e.* S est une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre $a + b$.
2. On voit bien que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\{X = k\} | \{S = n\}) &= \frac{\mathbb{P}(\{X = k\} \cap \{S = n\})}{\mathbb{P}(\{S = n\})} = \frac{\mathbb{P}(\{X = k\} \cap \{Y = n - k\})}{\mathbb{P}(\{S = n\})} \\ &= \frac{\mathbb{P}(\{X = k\})\mathbb{P}(\{Y = n - k\})}{\mathbb{P}(\{S = n\})} = \binom{n}{k} \frac{a^k b^{n-k}}{(a+b)^n}, \end{aligned}$$

pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ et zéro sinon, où l'on a utilisé que X et Y sont indépendantes.

3. D'après le premier item, on voit bien que $S_\ell = X_1 + \dots + X_\ell$ est une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre $s_\ell = a_1 + \dots + a_\ell$, pour tout $\ell \in \llbracket 0, r + 1 \rrbracket$.

Soit $\bar{X} = (X_1, \dots, X_r)$. Pour $\bar{x} = (x_1, \dots, x_r) \in \mathbb{N}^r$, on pose $|\bar{x}| = x_1 + \dots + x_r$. On veut calculer

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\{\bar{X} = \bar{x}\} | \{S_{r+1} = n\}) &= \frac{\mathbb{P}(\{\bar{X} = \bar{x}\} \cap \{T = n\})}{\mathbb{P}(\{S_{r+1} = n\})} = \frac{\mathbb{P}(\{\bar{X} = \bar{x}\} \cap \{X_{r+1} = n - |\bar{x}|\})}{\mathbb{P}(\{S_{r+1} = n\})} \\ &= \frac{\mathbb{P}(\{\bar{X} = \bar{x}\}) \mathbb{P}(\{X_{r+1} = n - |\bar{x}|\})}{\mathbb{P}(\{S_{r+1} = n\})} = \frac{n!}{(n - |\bar{x}|)! \prod_{i=1}^r x_i!} \frac{a_{r+1}^{n-|\bar{x}|} \prod_{i=1}^r a_i^{x_i}}{s_{r+1}^n}, \end{aligned}$$

pour tout $\bar{x} = (x_1, \dots, x_r) \in \mathbb{N}^r$ tel que $|\bar{x}| \leq n$, et zéro sinon, où l'on a utilisé que $(X_k)_{k=1, \dots, r+1}$ sont indépendantes.

□

Exercice 151 Loi jointe On effectue une suite infinie de lancers indépendants d'un dé équilibré. On numérote les lancers à partir de 1. On définit X comme le numéro du premier lancer qui donne 6 et Y comme le nombre de 5 obtenus avant d'obtenir le premier 6.

1. Déterminer la loi du couple (X, Y) .
2. Déterminer la loi conditionnelle de Y sachant l'événement $\{X = n\}$.
3. Déterminer la loi de Y .

Proof.

1. On voit bien que l'univers de l'espace probabilisé est $\Omega = \cup_{n \in \mathbb{N}^*} \Omega_n$, avec tribu $\mathcal{P}(\Omega)$, où $\Omega_n = \llbracket 1, 5 \rrbracket^{n-1} \times \{6\}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On écrit $\bar{a} = (a_1, \dots, a_n) \in \Omega_n$. On voit bien que $\mathbb{P}(\{\bar{a}\}) = 1/6^n$, $X(\bar{a}) = n$ et $Y(\bar{a}) = \#\{i \in \llbracket 1, n \rrbracket : a_i = 5\}$, si $\bar{a} \in \Omega_n$. Noter que $\#\{\Omega_n\} = 5^{n-1}$ et $\Omega_n = \{X = n\}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. C'est facile à voir que

$$\mathbb{P}(\{(X, Y) = (x, y)\}) = \binom{x-1}{y} \frac{4^{x-1-y}}{6^x},$$

pour tous $x \in \mathbb{N}^*$ et $y \in \llbracket 0, x-1 \rrbracket$, et zéro sinon.

2. On voit bien que

$$\mathbb{P}(\{Y = y\} | \{X = n\}) = \frac{\mathbb{P}(\{(X, Y) = (n, y)\})}{\mathbb{P}(\{X = n\})} = \binom{n-1}{y} \frac{4^{n-1-y}}{5^{n-1}},$$

pour tout $y \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$.

3. C'est clair que

$$\mathbb{P}(\{Y = y\}) = \sum_{x=y+1}^{+\infty} \mathbb{P}(\{(X, Y) = (x, y)\}) = \frac{1}{4^{y+1}} \sum_{x=y+1}^{+\infty} \binom{x-1}{y} \left(\frac{4}{6}\right)^x,$$

pour tout $y \in \mathbb{N}$.

□

Exercice 152 Espérance discrète Soit X une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{N} . Montrer que X admet une espérance si et seulement si la série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\{X > n\})$$

converge et que

$$E[X] = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\{X > n\}).$$

Proof. C'est clair que X admet une espérance si et seulement si la série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n\mathbb{P}(\{X = n\})$$

converge et que

$$E[X] = \sum_{n=0}^{+\infty} n\mathbb{P}(\{X = n\}).$$

Soit $a_n = \mathbb{P}(\{X = n\})$, pour $n \in \mathbb{N}$, et $A_{n,m} = \sum_{k=n}^m a_k$, pour tous $n \leq m$ entiers positifs.

On pose aussi $A_n = \mathbb{P}(\{X > n\})$, pour $n \in \mathbb{N}$. Noter que $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et que $A_{n+1,m} = \mathbb{P}(\{m \geq X > n\}) = A_n - A_m$. Alors,

$$\sum_{n=0}^N na_n = \sum_{n=1}^N na_n = \sum_{n=1}^N A_{n,N} = \sum_{n=1}^N (A_n - A_N) = -NA_N + \sum_{n=1}^N A_n,$$

pour tout $N \in \mathbb{N}^*$.

Si $\sum_{n=0}^{+\infty} A_n$ converge, alors NA_N tend vers zéro quand N tend vers $+\infty$. Cela suit du fait

que, si une série $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ converge et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{\mathbb{N}}$ est décroissante, alors

$$nb_{2n+1} \leq nb_{2n} \leq \sum_{k=n}^{2n} b_k$$

converge vers zéro. En conséquence, la série $\sum_{n=0}^{+\infty} na_n$ converge, *i.e.* X admet une espérance,

et elle a la même limite que $E[X] = \sum_{n=0}^{+\infty} A_n$.

Réciproquement, si la série $\sum_{n=0}^{+\infty} na_n$ converge, *i.e.* X admet une espérance, alors

$$NA_N = N \sum_{n=N+1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=N+1}^{+\infty} Na_n \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} na_n$$

tend vers zéro quand N tend vers $+\infty$. En conséquence, la série $\sum_{n=0}^{+\infty} A_n$ converge et elle a

la même limite que $E[X] = \sum_{n=0}^{+\infty} na_n$. \square

Exercice 153 *Lois géométriques* Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de lois géométriques de paramètres respectifs a et b . Soit $Z = \min(X, Y)$ et $U = |X - Y|$.

1. Déterminer $\mathbb{P}(\{X \geq n\})$ et $\mathbb{P}(\{Z \geq n\})$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Préciser la loi de Z .
2. Calculer $\mathbb{P}(\{U = 0\})$. Déterminer la loi de U .
3. Montrer que Z et U sont indépendantes.

Proof.

1. On voit bien que

$$\mathbb{P}(\{X \geq n\}) = \sum_{k=n}^{+\infty} \mathbb{P}(\{X = k\}) = \sum_{k=n}^{+\infty} p(1-p)^{k-1} = (1-p)^{n-1},$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. En outre,

$$\mathbb{P}(\{Z \geq n\}) = \mathbb{P}(\{X \geq n\} \cap \{Y \geq n\}) = \mathbb{P}(\{X \geq n\})\mathbb{P}(\{Y \geq n\}) = (1-p)^{2(n-1)},$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, où l'on a utilisé que X et Y sont indépendantes. Cela implique que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\{Z = n\}) &= \mathbb{P}(\{Z \geq n\}) - \mathbb{P}(\{Z \geq n+1\}) = (1-p)^{2(n-1)} - (1-p)^{2n} \\ &= p(1-p)^{2(n-1)}(2-p), \end{aligned}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

2. C'est clair que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\{U = 0\}) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\{X = n\} \cap \{Y = n\}) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\{X = n\})\mathbb{P}(\{Y = n\}) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} p^2(1-p)^{2(n-1)} = \frac{p}{2-p}, \end{aligned}$$

où l'on a utilisé que X et Y sont indépendantes. En plus, le rang de U est \mathbb{N} et

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\{U = k\}) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\{X = n+k\} \cap \{Y = n\}) + \mathbb{P}(\{X = n\} \cap \{Y = n+k\}) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\{X = n+k\})\mathbb{P}(\{Y = n\}) + \mathbb{P}(\{X = n\})\mathbb{P}(\{Y = n+k\}) \\ &= 2 \sum_{n=1}^{+\infty} p^2(1-p)^{2(n-1)+k} = \frac{2p(1-p)^k}{2-p}, \end{aligned}$$

pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

3. On voit bien que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\{U = 0, Z = n\}) &= \mathbb{P}(\{X = n, Y = n\}) \\ &= p^2(1-p)^{2(n-1)} = \frac{p}{2-p} p(1-p)^{2(n-1)}(2-p) \\ &= \mathbb{P}(\{U = 0\})\mathbb{P}(\{Z = n\}) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\{U = m, Z = n\}) &= \mathbb{P}(\{X = n, Y = m+n\}) + \mathbb{P}(\{X = m+n, Y = n\}) \\ &= 2p^2(1-p)^{m+2(n-1)} = \frac{2p(1-p)^m}{2-p} p(1-p)^{2(n-1)}(2-p) \\ &= \mathbb{P}(\{U = m\})\mathbb{P}(\{Z = n\}), \end{aligned}$$

pour tous $m, n \in \mathbb{N}^*$.

□

Exercice 154 *Jeu de cartes* On considère un jeu de n cartes numérotées de 1 à n . On mélange bien ce jeu. Rappeler comment modéliser cette expérience. On suppose qu'on met les cartes en un paquet, la première position étant celle du dessus et la dernière celle du dessous. Pour $1 \leq k \leq n$, on note X_k la variable aléatoire valant 1 si la carte portant le numéro k est à la k -ème position et 0 sinon.

1. Donner la loi de X_k .
2. Donner la loi de (X_j, X_k) si $k \neq j$.
Indication : calculer d'abord $\mathbb{P}((X_j, X_k) = (1, 1))$.
3. Soit $S_n = X_1 + \dots + X_n$. Que représente S_n ? Calculer l'espérance et la variance de S_n .
4. Calculer $\mathbb{P}(S_n \neq 0)$. Calculer la limite précédente quand n tend vers l'infini.
Indication : utiliser la formule de Poincaré avec les événements $\{X_k = 1\}$.
5. (Question difficile) Donner la loi de S_n . Déterminer la limite quand n tend vers l'infini de $\mathbb{P}(S_n = k)$ (k étant fixé).

Proof. On voit bien que l'univers de l'espace probabilisé est $\Omega = \mathbb{S}_n$, avec tribu $\mathcal{P}(\Omega)$, où $\sigma \in \Omega$ représente la configuration où la i -ème carte est dans $\sigma(i)$ -ème position. Il s'agit d'un espace équiprobable. C'est clair que $X_k(\sigma) = 1$ si $\sigma(k) = k$ et zéro sinon, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $\sigma \in \Omega$.

1. On voit bien

$$\mathbb{P}(\{X_k = 1\}) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n} \text{ et } \mathbb{P}(\{X_k = 0\}) = 1 - \mathbb{P}(\{X_k = 1\}) = \frac{n-1}{n},$$

pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, et zéro sinon.

2. Soient $j, k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ avec $j \neq k$. Le rang de (X_j, X_k) est $\{0, 1\}^2$. C'est facile à voir que

$$\mathbb{P}(\{(X_j, X_k) = (1, 1)\}) = \frac{(n-2)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)}.$$

En outre,

$$\mathbb{P}(\{(X_j, X_k) = (1, 0)\}) = \mathbb{P}(\{(X_j, Y_k) = (0, 1)\}) = \frac{(n-2)!(n-2)}{n!} = \frac{(n-2)}{n(n-1)}$$

et

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\{(X_j, X_k) = (0, 0)\}) &= 1 - \mathbb{P}(\{(X_j, X_k) = (1, 1)\}) - 2\mathbb{P}(\{(X_j, Y_k) = (0, 1)\}) \\ &= \frac{n^2 - 3n + 3}{n(n-1)}. \end{aligned}$$

3. C'est clair que S_n est la variable aléatoire qui représente la quantité de cartes qui sont bien ordonnées dans la pile. On voit bien que

$$E[S_n] = \sum_{i=1}^n E[X_i] = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(\{X_i = 1\}) = n \frac{1}{n} = 1.$$

En outre, comme $\text{Var}[S_n] = E[S_n^2] - E[S_n]^2$, il suffit de calculer $E[S_n^2]$. Or,

$$\begin{aligned} E[S_n^2] &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n E[X_i X_j] = \sum_{\substack{i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket \\ i \neq j}} E[X_i X_j] + \sum_{i=1}^n E[X_i X_i] \\ &= \sum_{\substack{i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket \\ i \neq j}} \mathbb{P}(\{(X_j, X_k) = (1, 1)\}) + \sum_{i=1}^n E[X_i] = n(n-1) \frac{1}{n(n-1)} + n \frac{1}{n} = 2, \end{aligned}$$

où l'on a utilisé que $X_i^2 = X_i$. En conséquence, $\text{Var}[S_n] = 2 - 1^2 = 1$.

4. C'est clair que le rang de S_n est $\llbracket 0, n \rrbracket$. Comme $\{S_n \geq 1\} = \cup_{i=1}^n \{X_i = 1\}$, la formule de Poincaré nous dit que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\{S_n \geq 1\}) &= \sum_{k=1}^n \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} (-1)^{k+1} \mathbb{P}(\{X_{i_1} = \dots = X_{i_k} = 1\}) \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} (-1)^{k+1} \frac{(n-k)!}{n!} = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \binom{n}{k} \frac{(n-k)!}{n!} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k!}. \end{aligned}$$

En conséquence,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(\{S_n \geq 1\}) = 1 - e^{-1}.$$

5. On note d'abord que

$$\mathbb{P}(\{S_n = 0\}) = 1 - \mathbb{P}(\{S_n \geq 1\}) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}.$$

La limite de $\mathbb{P}(\{S_n = 0\})$ quand n tend vers $+\infty$ est alors e^{-1} . Pour tout $S \subseteq \llbracket 1, n \rrbracket$, on pose

$$A_S = \bigcap_{i \in S} \{X_i = 1\}$$

et, pour $k \in \mathbb{N}^*$ avec $k \leq n$,

$$\mathcal{A}_k = \{A_S : S \subseteq \llbracket 1, n \rrbracket \text{ et } \#(S) = k\}.$$

On remarque que le cardinal de \mathcal{A}_k est $n!/(k!(n-k)!)$ et

$$\{S_n \geq k\} = \bigcup_{A \in \mathcal{A}_k} A.$$

La formule de Poincaré nous dit alors que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\{S_n \geq k\}) &= \sum_{\ell=k}^n \sum_{A \in \mathcal{A}_\ell} (-1)^{\ell+1} \mathbb{P}(A) = \sum_{\ell=k}^n \sum_{A \in \mathcal{A}_\ell} (-1)^{\ell+1} \frac{(n-\ell)!}{n!} \\ &= \sum_{\ell=k}^n (-1)^{\ell+1} \binom{n}{\ell} \frac{(n-\ell)!}{n!} = \sum_{\ell=k}^n \frac{(-1)^{\ell+1}}{\ell!}, \end{aligned}$$

pour $k \in \mathbb{N}^*$ avec $k \leq n$. Cela implique que

$$\mathbb{P}(\{S_n = k\}) = \mathbb{P}(\{S_n \geq k\}) - \mathbb{P}(\{S_n \geq k+1\}) = \frac{(-1)^{k+1}}{k!},$$

pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ avec $k \leq n$. En particulier,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(\{S_n = k\}) = \frac{(-1)^{k+1}}{k!},$$

pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

□

Exercice 155 *La médiane* Soit X une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{R} . Un réel m est une *médiane* de X si $\mathbb{P}(X \leq m) \geq 1/2$ et $\mathbb{P}(X \geq m) \geq 1/2$.

1. Montrer qu'une médiane existe toujours mais qu'on a pas toujours unicité.
2. Expliquer comment on trouve une médiane sur l'histogramme ou sur le graphe de la fonction de répartition.
3. En utilisant l'inégalité de Tchebychev, montrer que si X admet une espérance μ et un écart type σ , $(\mu - m)^2 \leq \sigma^2$, où m est une médiane de X .
4. Comparer espérance et médiane dans les exemples suivants : loi uniforme sur $\{1, \dots, n\}$, loi binomiale de paramètre (n, p) , loi géométrique de paramètre p et loi de Poisson de paramètre λ .

Proof.

1. Soit $F_X : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ la fonction de répartition de F , i.e. $F_X(x) = \mathbb{P}(\{X \leq x\})$, pour tout $x \in \mathbb{R}$. Pour $y \in [0, 1]$, on définit $A_y = \{x \in \mathbb{R} : F_X(x) \geq y\} = F_X^{-1}([y, 1])$ et $G_X : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ via $G_X(y) = \inf A_y$. Comme la fonction F_X est continue à droite, on voit bien que A_y possède un minimum et $G_X(y)$ est ce minimum. Cela nous dit que $F_X(G_X(y)) \geq y$, i.e.

$$\mathbb{P}(\{X \leq G_X(y)\}) \geq y, \tag{22}$$

pour tout $y \in [0, 1]$.

En outre, on affirme que

$$\mathbb{P}(\{X \geq G_X(y)\}) \geq 1 - y, \tag{23}$$

pour tout $y \in [0, 1]$. En effet, si $x < G_X(y)$, alors $F_X(x) < y$, vu que $G_X(y)$ est le minimum de A_y . Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $x_n = G_X(y) - 1/n$, ce qui dit que $F_X(x_n) < y$, i.e.

$$\mathbb{P}(\{X \leq x_n\}) < y, \tag{24}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On voit bien que la suite des événements $(\{X \leq x_n\})_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante au sens large et que

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} \{X \leq x_n\} = \{X < G_X(y)\},$$

ce qui nous dit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(\{X \leq x_n\}) = \mathbb{P}(\{X < G_X(y)\}).$$

En outre, (24) implique que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(\{X \leq x_n\}) \leq y,$$

ce qui nous dit que $\mathbb{P}(\{X < G_X(y)\}) \leq y$, d'où (23) suit directement.

Les identités (22) et (23) nous disent que $G_X(1/2)$ est une médiane de X . Pour montrer que l'on n'a pas d'unicité de médiane, considérer par exemple la variable aléatoire X de loi uniforme sur $\llbracket 1, 2 \rrbracket$. On voit bien que tout élément dans l'intervalle $[1, 2]$ est une médiane de X . C'est facile à montrer que l'ensemble de médianes $\mathcal{M}_X \subseteq \mathbb{R}$ de X est un intervalle de \mathbb{R} : il suffit de montrer que si $m_1 < m_2$ sont deux médianes de X alors $m \in [m_1, m_2]$ est aussi une médiane de X , ce qui est immédiat de la définition. On définit (habituellement) la médiane m_X de X comme le milieu de l'intervalle \mathcal{M}_X .

2. On peut prendre le minimum de $A_{1/2} = \{x \in \mathbb{R} : F_X(x) \geq 1/2\} = F_X^{-1}([1/2, 1])$.
3. Pour le démontrer, on montre d'abord l'inégalité de Markov, *i.e.* si Y est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}_{\geq 0}$, alors

$$\mathbb{P}(\{Y \geq c\}) \leq \frac{E[Y]}{c}, \quad (\text{Mar})$$

pour tout $c > 0$. On fait la preuve dans le cas discrète. Soit $R_Y \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$ le rang de Y . Alors,

$$E[Y] = \sum_{y \in R_Y} y \mathbb{P}(\{Y = y\}) \geq \sum_{\substack{y \in R_Y \\ y \geq c}} y \mathbb{P}(\{Y = y\}) \geq c \sum_{\substack{y \in R_Y \\ y \geq c}} \mathbb{P}(\{Y = y\}) = c \mathbb{P}(\{Y \geq c\}).$$

Soit $\alpha \geq 0$. On pose $Z = X - \mu + \alpha$ et $Y = Z^2$. L'inégalité (Mar) nous donne que

$$\mathbb{P}(\{X - \mu \geq c\}) = \mathbb{P}(\{Z \geq c + \alpha\}) \leq \mathbb{P}(\{Y \geq (c + \alpha)^2\}) \leq \frac{E[Y]}{(c + \alpha)^2} = \frac{\sigma^2 + \alpha^2}{(c + \alpha)^2},$$

pour tout $c > 0$. Comme l'inégalité précédente est valable pour tout $\alpha \geq 0$, elle est en particulier vraie pour $u = \sigma^2/c$, ce qui implique que

$$\mathbb{P}(\{X - \mu \geq c\}) \leq \frac{\sigma^2}{c^2 + \sigma^2},$$

pour tout $c > 0$, ou, de façon équivalente, l'inégalité de Cantelli, *i.e.*

$$\mathbb{P}(\{X - \mu \geq C\sigma\}) \leq \frac{1}{C^2 + 1}, \quad (\text{Can})$$

pour tout $C > 0$.

Or, si l'on utilise (Can) avec $C = 1$, on trouve que

$$\mathbb{P}(\{X \geq \mu + \sigma\}) \leq \frac{1}{2}.$$

Si l'on remplace X par $-X$ (et μ par $-\mu$), on trouve que

$$\mathbb{P}(\{X \leq \mu - \sigma\}) \leq \frac{1}{2}.$$

Cela nous dit que toute médiane m de X est dans l'intervalle $[\mu - \sigma, \mu + \sigma]$ et en conséquence $|m - \mu| \leq \sigma$, *i.e.* $(m - \mu)^2 \leq \sigma^2$.

4. Si X suit une loi uniforme sur $\{1, \dots, n\}$, alors $\mu = m_X = (n + 1)/2$. Si X suit une loi binomiale de paramètre (n, p) , alors $\mu = np$ et $m_X = \lfloor np \rfloor$ ou $m_X = \lceil np \rceil$. Si X suit une loi géométrique de paramètre p , alors $\mu = 1/p$ et $m = \lceil -\ln(2)/\ln(1 - p) \rceil$. Finalement, si X suit une loi de Poisson de paramètre λ , alors $\mu = \lambda$ et $m \simeq \lfloor \lambda + 1/3 - 0.02/\lambda \rfloor$.

□

Exercice 156 *L'urne de Pólya* Soient $a \geq 0$, $b \geq 0$ et $c \geq 0$ des entiers avec $a + b \geq 1$. Une urne contient a boules rouges et b boules noires. Si l'on tire une boule, on remet dans l'urne c boules de la couleur de la boule tirée (le cas du tirage avec remise simple est donnée par $c = 1$ et celui du tirage sans remise par $c = 0$).

1. Calculer la probabilité qu'au deuxième tirage, on tire une boule rouge.
2. Calculer la probabilité qu'au troisième tirage, on tire une boule rouge.
3. On note X_i la variable aléatoire valant 1 si l'on tire une boule rouge au tirage numéro i et 0 sinon. Les variables X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?
4. Que représente la variable aléatoire $S_i = X_1 + \dots + X_i$?
5. Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $\mathbb{P}(\{S_i = k\}) > 0$. Calculer $\mathbb{P}(\{X_{i+1} = 1\} | \{S_i = k\})$.
6. En utilisant la formule des probabilités totales montrer que

$$\mathbb{P}(\{X_{i+1} = 1\}) = \frac{(c-1)E[S_i] + a}{a + b + i(c-1)}.$$

En déduire la valeur de $\mathbb{P}(\{X_i = 1\})$.

Proof.

1. Soient R_n et N_n l'évènement "extraire un boule rouge au n -ème tirage" et "extraire un boule noire au n -ème tirage", pour $n \in \mathbb{N}^*$. C'est facile à voir que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(R_2) &= \mathbb{P}(R_2|R_1)\mathbb{P}(R_1) + \mathbb{P}(R_2|N_1)\mathbb{P}(N_1) \\ &= \frac{a+c-1}{a+b+c-1} \frac{a}{a+b} + \frac{a}{a+b+c-1} \frac{b}{a+b} = \frac{a}{a+b}. \end{aligned}$$

2. On voit bien que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(R_3) &= \mathbb{P}(R_3|R_2 \cap R_1)\mathbb{P}(R_2 \cap R_1) + \mathbb{P}(R_3|N_2 \cap R_1)\mathbb{P}(N_2 \cap R_1) + \mathbb{P}(R_3|R_2 \cap N_1)\mathbb{P}(R_2 \cap N_1) \\ &\quad + \mathbb{P}(R_3|N_2 \cap N_1)\mathbb{P}(N_2 \cap N_1) \\ &= \frac{a+2(c-1)}{a+b+2(c-1)} \frac{a+c-1}{a+b+c-1} \frac{a}{a+b} + \frac{a+c-1}{a+b+2(c-1)} \frac{b}{a+b+c-1} \frac{a}{a+b} \\ &\quad + \frac{a+c-1}{a+b+2(c-1)} \frac{a}{a+b+c-1} \frac{b}{a+b} + \frac{a}{a+b+2(c-1)} \frac{b+c-1}{a+b+c-1} \frac{b}{a+b} \\ &= \frac{a}{a+b}. \end{aligned}$$

3. Les variables X_1 et X_2 ne sont pas indépendantes si $c \neq 1$ et $b \neq 0$, puisque

$$\mathbb{P}(\{X_1 = X_2 = 1\}) = \frac{a+c-1}{a+b+c-1} \frac{a}{a+b} \neq \frac{a}{a+b} \frac{a}{a+b} = \mathbb{P}(\{X_1 = 1\})\mathbb{P}(\{X_2 = 1\}).$$

4. Il s'agit de la quantité de boules rouges que l'on a tirée lors de i tirages.
5. On voit bien que

$$\mathbb{P}(\{S_i = k\}) = \binom{i}{k} \frac{\prod_{\ell=0}^{k-1} (a + \ell(c-1)) \prod_{m=0}^{i-k-1} (b + m(c-1))}{\prod_{n=0}^{i-1} (a + b + n(c-1))}$$

et

$$\mathbb{P}(\{X_{i+1} = 1, S_i = k\}) = \binom{i}{k} \frac{\prod_{\ell=0}^k (a + \ell(c-1)) \prod_{m=0}^{i-k-1} (b + m(c-1))}{\prod_{n=0}^i (a + b + n(c-1))}$$

pour tout $k \in \llbracket 0, i \rrbracket$, si $c \geq 1$, et $k \in \llbracket \max(0, i-b), \min(i, a) \rrbracket$ si $c = 0$. Les probabilités respectives sont nulles sinon. Cela nous dit que

$$\mathbb{P}(\{X_{i+1} = 1\} | \{S_i = k\}) = \frac{a + k(c-1)}{a + b + i(c-1)},$$

si k est dans le rang de S_i , *i.e.* $\mathbb{P}(\{S_i = k\}) > 0$.

6. Soit R_{S_i} le rang de la variable aléatoire S_i . C'est clair que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\{X_{i+1} = 1\}) &= \sum_{k \in R_{S_i}} \mathbb{P}(\{X_{i+1} = 1\} | \{S_i = k\}) \mathbb{P}(\{S_i = k\}) \\ &= \sum_{k \in R_{S_i}} \frac{a + k(c-1)}{a + b + i(c-1)} \mathbb{P}(\{S_i = k\}) = \frac{a + (c-1)E[S_i]}{a + b + i(c-1)}. \end{aligned}$$

Comme $E[S_i] = \sum_{j=1}^i E[X_j] = \sum_{j=1}^i \mathbb{P}(\{X_j = 1\})$, alors

$$\mathbb{P}(\{X_{i+1} = 1\}) = \frac{a + (c-1) \sum_{j=1}^i \mathbb{P}(\{X_j = 1\})}{a + b + i(c-1)}.$$

On va montrer par récurrence que $\mathbb{P}(\{X_j = 1\}) = a/(a+b)$, pour tout $j \in \mathbb{N}$. C'est clair que $\mathbb{P}(\{X_1 = 1\}) = a/(a+b)$. On suppose que c'est vrai pour tout $j \in \llbracket 1, i \rrbracket$. Alors ,

$$\mathbb{P}(\{X_{i+1} = 1\}) = \frac{a + (c-1) \sum_{j=1}^i \mathbb{P}(\{X_j = 1\})}{a + b + i(c-1)} = \frac{a + \frac{(c-1)ia}{a+b}}{a + b + i(c-1)} = \frac{a}{a+b},$$

comme on voulait démontrer.

□

Exercice 157 Dés et loi uniforme On va résoudre le problème suivant. Peut-on truquer deux dés de telle façon que la loi de la somme des points obtenus soit la loi uniforme sur $\{2, \dots, 12\}$?

1. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans l'ensemble $\{1, \dots, 6\}$. On suppose que $\mathbb{P}(\{X = 6\}) \neq 0$. Soit G_X sa fonction génératrice. Montrer qu'il existe un polynôme H_X ayant au moins une racine réelle tel que $G_X(s) = sH_X(s)$, pour tout $s \in \mathbb{R}$.
2. Soit Z une variable aléatoire de loi uniforme sur $\{2, \dots, 12\}$. Montrer qu'il existe un polynôme K tel que $G_Z(s) = s^2K(s)$, pour tout $s \in \mathbb{R}$. Montrer que K n'a pas de racines réelles.
3. Répondre à la question initiale.

Proof.

1. C'est clair que

$$G_X(t) = \sum_{i=1}^6 \mathbb{P}(\{X = i\})t^i = t \left(\sum_{i=0}^5 \mathbb{P}(\{X = i+1\})t^i \right).$$

Si l'on pose $H_X(t) = \sum_{i=0}^5 \mathbb{P}(\{X = i+1\})t^i$, il s'agit d'un polynôme de degré 5 (puisque $\mathbb{P}(\{X = 6\}) \neq 0$). Comme la limite de $H_X(t)$ est $\pm\infty$ quand t tend vers $\pm\infty$ et H_X est une fonction continue, elle admet au moins une racine réelle.

2. On voit bien que

$$G_Z(t) = \sum_{i=2}^{12} \mathbb{P}(\{Z = i\})t^i = t^2 \underbrace{\left(\sum_{i=0}^{10} \frac{t^i}{11} \right)}_{K(t)}.$$

Comme

$$K(t) = \sum_{i=0}^{10} \frac{t^i}{11} = \frac{t^{11} - 1}{11(t - 1)},$$

les racines de K sont exactement les racines primitives de l'unité d'ordre 11, qui ne sont pas réelles.

3. Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans l'ensemble $\{1, \dots, 6\}$ telles que $\mathbb{P}(\{X = 6\}), \mathbb{P}(\{Y = 6\}) \neq 0$, alors $X + Y$ est une variable aléatoire à valeurs dans l'ensemble $\{2, \dots, 12\}$. L'indépendance nous dit que $G_{X+Y}(t) = G_X(t)G_Y(t) = t^2 H_X(t)H_Y(t)$, avec H_X et H_Y polynômes avec au moins une racine réelle. En conséquence, l'item précédent nous dit que $X + Y$ n'est pas une variable aléatoire de loi uniforme sur $\{2, \dots, 12\}$.

□

Exercice 158 Perte au casino On considère un jeu au casino qui est tel qu'à chaque partie le joueur a une probabilité p de gagner et une probabilité $1 - p$ de perdre. Son gain est $+1$ s'il gagne et de -1 s'il perd. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note ϵ_n la variable aléatoire représentant son gain à la n -ème partie. Soit $X_n = \epsilon_1 + \dots + \epsilon_n$ son gain au bout de n parties.

1. Donner la loi de X_n .

Indication : poser $Z_k = \epsilon_k + 1/2$ pour se ramener à une loi connue.

2. Si sa fortune initiale est $i \in \mathbb{N}$, sa fortune au bout de n parties est donnée par $i + X_n$. On suppose que le joueur s'arrête dès que sa fortune vaut 0 (*i.e.* il est ruiné) ou une somme $N \in \mathbb{N}^*$ avec $N \geq i$. On note $p_N(i)$ la probabilité qu'il atteigne la fortune N . On a donc $p_N(0) = 0$ et $p_N(N) = 1$.

(i) Montrer que si $N \geq 2$, $p_N(1) = p.p_N(2)$.

(ii) Donner une relation entre $p_N(i - 1)$, $p_N(i)$ et $p_N(i + 1)$ si $1 \leq i \leq N - 1$. En déduire la valeur de $p_N(i)$ en fonction de p , i et N .

(iii) Déterminer la limite de $p_N(i)$ quand N tend vers $+\infty$.

Proof.

1. C'est clair que $Z_k = \epsilon_k + 1/2$ est une variable aléatoire de loi binomiale de paramètres 1 et p . Alors $Z = \sum_{k=1}^n Z_k$ est une variable aléatoire de loi binomiale de paramètres n et p . Comme $X_n = (Z + n)/2$, le rang de X est $\{-n + 2j : j \in \llbracket 0, n \rrbracket\}$ et

$$\mathbb{P}(\{X_n = -n + 2j\}) = \mathbb{P}(\{Z = j\}) = \binom{n}{j} p^j (1 - p)^{n-j},$$

pour tout $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

2. (i) C'est clair que $p_N(1)$ avec $N \geq 2$ est la probabilité de l'intersection des événements "le joueur gagne la première partie" et "le joueur atteint la fortune N avec une fortune initiale 2". Comme ces deux événements sont indépendants, l'identité $p_N(1) = p.p_N(2)$ est immédiate. En particulier, $p_2(1) = p$.

(ii) C'est clair que $p_N(i)$ avec $N \geq i + 1$ et $i \in \mathbb{N}^*$ est la probabilité de la réunion disjointe de

— l'intersection des évènements "le joueur gagne la première partie" et "le joueur atteint la fortune N avec une fortune initiale $i + 1$ ";

— l'intersection des évènements "le joueur perd la première partie" et "le joueur atteint la fortune N avec une fortune initiale $i - 1$ ".

Comme les évènements dans les intersections sont indépendants, cela implique que $p_N(i) = p.p_N(i + 1) + (1 - p).p_N(i - 1)$, ou, de façon équivalente,

$$p_N(i + 1) - \frac{1}{p}.p_N(i) + \frac{1 - p}{p}.p_N(i - 1) = 0.$$

Dans ce cas, l'équation quadratique associée est

$$X^2 - \frac{1}{p}X + \frac{1 - p}{p} = (X - 1)\left(X + \frac{p - 1}{p}\right).$$

Si $1 - p \neq p$, cela nous dit que

$$p_N(i) = a_N + b_N \left(\frac{1 - p}{p}\right)^i,$$

tandis que si $1 - p = p$, *i.e.* $p = 1/2$, alors

$$p_N(i) = a_N + b_N i,$$

pour tout $i \in \mathbb{N}$ tel que $N \geq i$, où a_N et b_N sont des constantes à déterminer (qui dépendent de p et de N). Les conditions $p_N(0) = 0$ dit que $a_N = -b_N$, si $1 - p \neq p$, et $a_N = 0$, si $p = 1/2$, tandis que $p_N(N) = 1$ nous dit que

$$a_N = \frac{1}{1 - \left(\frac{1 - p}{p}\right)^N} = \frac{p^N}{p^N - (1 - p)^N},$$

si $1 - p \neq p$, et $b_N = 1/N$ si $p = 1/2$. En conséquence,

$$p_N(i) = p^{N-i} \frac{p^i - (1 - p)^i}{p^N - (1 - p)^N},$$

si $1 - p \neq p$, et $p_N(i) = i/N$, si $p = 1/2$, pour tout $i \in \mathbb{N}$ tel que $N \geq i$.

(iii) Si $p = 1/2$, c'est clair que

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} p_N(i) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{i}{N} = 0,$$

pour tout $i \in \mathbb{N}$. En outre, si $1 - p \neq p$, on voit bien que

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} a_N = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 - \left(\frac{1 - p}{p}\right)^N} = \begin{cases} 1, & \text{si } 1 - p < p, \\ 0, & \text{si } 1 - p > p, \end{cases}$$

pour tout $i \in \mathbb{N}$, ce qui implique que

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} p_N(i) = \begin{cases} \frac{p^i - (1 - p)^i}{p^i}, & \text{si } 1 - p < p, \\ 0, & \text{si } 1 - p > p, \end{cases}$$

pour tout $i \in \mathbb{N}$.

□

9 Espaces probabilisés, variables aléatoires à densité

Exercice 159 Existe-t-il $c \in \mathbb{R}$ tel que

$$f(x) = \begin{cases} cx(1-x), & \text{si } x \in [0, 1], \\ 0, & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus [0, 1], \end{cases}$$

soit une densité de probabilité ? Répondre la même question avec $g(x) = de^{-x^2+4x}$.

Proof. On remarque qu'une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une densité de probabilité si et seulement si $\text{Im}(f) \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$, elle est intégrable et

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = 1. \quad (25)$$

Comme la fonction f est continue et à support compact, elle est intégrable sur \mathbb{R} . La condition (25) équivaut à

$$1 = \int_0^1 cx(1-x) dx = c \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{c}{6},$$

i.e. $c = 6$. On voit bien que la fonction g est intégrable sur \mathbb{R} , puisque

$$\int_{\mathbb{R}} de^{-x^2+4x} dx = \int_{\mathbb{R}} de^{-(x-2)^2+4} dx = de^4 \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} dy = \sqrt{\pi} de^4.$$

où l'on a fait la substitution $y = x - 2$ et on a utilisé l'exercice 19 de la fiche 3. En conséquence, g est une densité si et seulement si $d = e^{-4}/\sqrt{\pi}$. \square

Exercice 160 Soit $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$. Soit X une variable aléatoire de densité f donnée par

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{si } x \in]0, \alpha[, \\ 0, & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus]0, \alpha[. \end{cases}$$

1. Que vaut α ?
2. Représenter f et la fonction de répartition de X .
3. Que vaut $\mathbb{P}(\{X > 1\})$?

Proof.

1. Comme la fonction f est continue par morceaux et à support compact, elle est intégrable sur \mathbb{R} . La condition (25) équivaut à

$$1 = \int_0^\alpha x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^\alpha = \frac{\alpha^3}{3},$$

i.e. $\alpha = \sqrt[3]{3} > 1$.

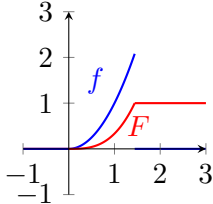
2. On rappelle que la fonction de répartition F associée à une densité f est donnée par

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(s) ds,$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$. Dans ce cas, on trouve alors

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in \mathbb{R}_{\leq 0}, \\ \frac{x^3}{3}, & \text{si } x \in]0, \alpha[, \\ 1, & \text{si } x \in \mathbb{R}_{\geq \alpha}. \end{cases}$$

La représentation graphique de f et de F est



3. On rappelle que

$$\mathbb{P}(\{X > x\}) = 1 - \mathbb{P}(\{X \leq x\}) = 1 - F(x),$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$. Comme $1 \in]0, \alpha[$, $\mathbb{P}(\{X > 1\}) = 1 - 1/3 = 2/3$.

□

Exercice 161 Soit X de loi uniforme sur $[-2, 1]$. Quelle est la loi de $|X|$?

Proof. On va montrer que $|X|$ est une variable aléatoire absolument continue, *i.e.* elle admet une densité, et on va déterminer sa densité. Comme X est une variable aléatoire de loi uniforme sur $[-2, 1]$, sa fonction de densité est $f_X = \mathbb{1}_{[-2, 1]}/3$, *i.e.* un tiers de la fonction indicatrice de $[-2, 1]$. Or, la fonction de répartition $F_{|X|}$ de $|X|$ est donnée par

$$F_{|X|}(y) = \mathbb{P}(\{|X| \leq y\}),$$

pour tout $y \in \mathbb{R}$. C'est clair que $F_{|X|}(y) = 0$ pour tout $y < 0$, puisque $\{|X| \leq y\} = \emptyset$, si $y < 0$. En outre, si $y \geq 0$, alors

$$F_{|X|}(y) = \mathbb{P}(\{-y \leq X \leq y\}) = \int_{-y}^y f_X(x) dx.$$

En conséquence, si $y \in [0, 1]$, on a

$$F_{|X|}(y) = \int_{-y}^y \frac{1}{3} dx = \frac{2y}{3},$$

si $y \in [1, 2]$, on a

$$F_{|X|}(y) = \int_{-y}^1 \frac{1}{3} dx = \frac{1+y}{3},$$

et $F_{|X|}(y) = 1$ si $y \geq 2$.

On rappelle qu'une fonction de répartition $G : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ admet une densité si et seulement s'il existe une fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ intégrable telle que

$$G(x) = \int_{-\infty}^x g(s) ds,$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$. Noter que la fonction g n'est pas unique. Dans ce cas, c'est facile à vérifier que $|X|$ admet la densité

$$f_{|X|}(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}, & \text{si } x \in [0, 1[, \\ \frac{1}{3}, & \text{si } x \in [1, 2[, \\ 0, & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus [0, 2[. \end{cases}$$

□

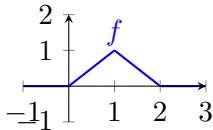
Exercice 162 Soit X une variable aléatoire de densité f donnée par

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \in [0, 1[, \\ 2 - x, & \text{si } x \in [1, 2[, \\ 0, & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus [0, 2[. \end{cases}$$

1. Représenter f .
2. Calculer $\mathbb{P}(\{X > 1\})$.
3. Soit $0 < b < 1$. Calculer $\mathbb{P}(\{1 - b < X \leq 1 + b\})$.
4. Montrer que les événements $\{X > 1\}$ et $\{1 - b < X \leq 1 + b\}$ sont indépendants.

Proof.

1. On voit bien que



2. C'est clair que

$$\mathbb{P}(\{X > 1\}) = 1 - \mathbb{P}(\{X \leq 1\}) = 1 - \int_{-\infty}^1 f(x)dx = 1 - \int_0^1 xdx = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

3. On voit bien que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\{1 - b < X \leq 1 + b\}) &= \mathbb{P}(\{X \leq 1 + b\}) - \mathbb{P}(\{X \leq 1 - b\}) = \int_{1-b}^{1+b} f(x)dx \\ &= \int_{1-b}^1 xdx + \int_1^{1+b} (2 - x)dx = \int_{1-b}^1 xdx + \int_{1-b}^1 ydy \\ &= 2 \int_{1-b}^1 xdx = \left[x^2 \right]_{1-b}^1 = b(2 - b), \end{aligned}$$

où l'on a fait la substitution $y = 2 - x$.

4. Il faut montrer que $\mathbb{P}(\{X > 1\} \cap \{1 - b < X \leq 1 + b\}) = \mathbb{P}(\{X > 1\})\mathbb{P}(\{1 - b < X \leq 1 + b\})$. Or, comme $\{X > 1\} \cap \{1 - b < X \leq 1 + b\} = \{1 < X \leq 1 + b\}$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\{X > 1\} \cap \{1 - b < X \leq 1 + b\}) &= \mathbb{P}(\{X \leq 1 + b\}) - \mathbb{P}(\{X \leq 1\}) = \int_1^{1+b} f(x)dx \\ &= \int_1^{1+b} (2 - x)dx = \int_{1-b}^1 ydy = 2 \left[\frac{y^2}{2} \right]_{1-b}^1 = \frac{b(2 - b)}{2}, \end{aligned}$$

où l'on a fait la substitution $y = 2 - x$. En outre, d'après les items précédents

$$\mathbb{P}(\{X > 1\})\mathbb{P}(\{1 - b < X \leq 1 + b\}) = \frac{b(2 - b)}{2},$$

comme on voulait démontrer.

□

Exercice 163 Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires réelles à valeurs dans l'ensemble $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq y\}$ et dont la fonction de répartition est donnée par

$$F_{X,Y}(x, y) = 1 - e^{-x} - xe^{-y},$$

si $(x, y) \in D$.

1. Déterminer F_X et F_Y .
2. (X, Y) admet-il une densité sur \mathbb{R}^2 ?
3. Déterminer les lois marginales de (X, Y) .
4. Calculer $\mathbb{P}(\{X \leq 1\}|\{Y > 2\})$.
5. Calculer $\mathbb{P}(\{Y \leq 2X\})$.

Proof.

1. L'énoncé nous dit que

$$\mathbb{P}(\{(X, Y) \in E\}) = 0,$$

pour tout $E \subseteq \mathbb{R}^2$ tel que $E \cap D = \emptyset$. Cela implique immédiatement que

$$F_{X,Y}(x, y) = \mathbb{P}(\{X \leq x, Y \leq y\}) = 0,$$

pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $y < 0$, ou $x < 0$. En plus, si $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ avec $y \leq x$, alors

$$\mathbb{R}_{\leq x} \times \mathbb{R}_{\leq y} = (\mathbb{R}_{\leq y} \times \mathbb{R}_{\leq y}) \sqcup \underbrace{(\]y, x] \times \mathbb{R}_{\leq y})}_A.$$

Comme $A \cap D = \emptyset$, alors $\mathbb{P}((X, Y) \in A) = 0$, ce qui implique que

$$F_{X,Y}(x, y) = \mathbb{P}(\{X \leq x, Y \leq y\}) = \mathbb{P}(\{X \leq y, Y \leq y\}) = F_{X,Y}(y, y),$$

pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ avec $y \leq x$.

Pour calculer F_X , on utilise que

$$F_X(x) = \lim_{y \rightarrow +\infty} F_{X,Y}(x, y),$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$. Cela implique que $F_X(x) = 0$ si $x < 0$. En outre, si $x \geq 0$, on a

$$F_X(x) = \lim_{y \rightarrow +\infty} F_{X,Y}(x, y) = \lim_{\substack{y \rightarrow +\infty \\ x \leq y}} F_{X,Y}(x, y) = \lim_{\substack{y \rightarrow +\infty \\ x \leq y}} 1 - e^{-x} - xe^{-y} = 1 - e^{-x}.$$

Pour calculer F_Y , on utilise que

$$F_Y(y) = \lim_{x \rightarrow +\infty} F_{X,Y}(x, y),$$

pour tout $y \in \mathbb{R}$. Cela implique que $F_Y(y) = 0$ si $y < 0$. En outre, si $y \geq 0$, on a

$$F_Y(y) = \lim_{x \rightarrow +\infty} F_{X,Y}(x, y) = \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \leq x}} F_{X,Y}(x, y) = \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \leq x}} F_{X,Y}(y, y) = 1 - e^{-y} - ye^{-y}.$$

2. On rappelle que $F_{X,Y}$ admet une densité s'il existe une fonction $f_{X,Y} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ intégrable telle que

$$F_{X,Y}(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f_{X,Y}(s, t) dt ds,$$

pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Dans ce cas, on voit bien que

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} e^{-y}, & \text{si } (x, y) \in D, \\ 0, & \text{si } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus D, \end{cases}$$

est une densité associée à la fonction de répartition $F_{X,Y}$,

3. C'est facile à voir que

$$f_X(x) = \begin{cases} e^{-x}, & \text{si } x \in \mathbb{R}_{\geq 0}, \\ 0, & \text{si } x \in \mathbb{R}_{< 0}, \end{cases}$$

est une densité associée à la fonction de répartition F_X , tandis que

$$f_Y(y) = \begin{cases} ye^{-y}, & \text{si } y \in \mathbb{R}_{\geq 0}, \\ 0, & \text{si } y \in \mathbb{R}_{< 0}, \end{cases}$$

est une densité associée à la fonction de répartition F_Y .

4. On voit bien que

$$\mathbb{P}(\{X \leq 1, Y > 2\}) = \mathbb{P}(\{X \leq 1\}) - \mathbb{P}(\{X \leq 1, Y \leq 2\}) = F_X(1) - F_{X,Y}(1, 2) = e^{-2}$$

et

$$\mathbb{P}(\{Y > 2\}) = 1 - \mathbb{P}(\{Y \leq 2\}) = 1 - F_Y(2) = 3e^{-2}.$$

Cela nous dit que

$$\mathbb{P}(\{X \leq 1\} | \{Y > 2\}) = \frac{\mathbb{P}(\{X \leq 1, Y > 2\})}{\mathbb{P}(\{Y > 2\})} = \frac{1}{3}.$$

5. Soit $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq 2x\}$. On veut calculer $\mathbb{P}((X, Y) \in B)$, *i.e.*

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\{Y \leq 2X\}) &= \iint_B f_{X,Y}(x, y) dx dy = \int_0^{+\infty} \int_x^{2x} e^{-y} dy dx = \int_0^{+\infty} (e^{-x} - e^{-2x}) dx \\ &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \left[\frac{e^{-2x}}{2} - e^{-x} \right]_0^A = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

□

Exercice 164 Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires réelles à valeurs dans l'ensemble $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq y \leq 1\}$ admettant une densité donnée par

$$f(x, y) = \frac{\mathbb{1}_D(x, y)}{y}.$$

1. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
2. Soit $U = X/Y$ et $V = Y$. Déterminer la fonction de répartition de (U, V) .
3. Les variables aléatoires U et V sont-elles indépendantes ?

Proof.

1. On remarque d'abord que f est intégrable sur \mathbb{R}^2 . En effet, on voit bien que $x \mapsto f(x, y)$ est intégrable sur \mathbb{R} , pour tout $y \in \mathbb{R}$, et la fonction $y \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(x, y) dx = \mathbb{1}_{[0,1]}(y)$ est absolument intégrable sur \mathbb{R} . Le théorème de Fubini implique alors que f est intégrable sur \mathbb{R}^2 .

Comme f est intégrable sur \mathbb{R}^2 , le théorème de Fubini nous dit que les densités de X et Y existent et elles sont données par

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x, y) dy \text{ et } f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x, y) dx,$$

respectivement, pour tous $x, y \in \mathbb{R} \setminus Z$, où Z est un ensemble négligeable. Dans ce cas, $f_X(x) = 0$ si $x \in \mathbb{R} \setminus [0, 1]$ et

$$f_X(x) = \int_x^1 \frac{1}{y} dy = -\ln(x),$$

pour tout $x \in]0, 1]$. On pose $f_X(1) = 0$. La fonction f_X est intégrable par le théorème de Fubini. En outre, $f_Y(y) = 0$ si $y \in \mathbb{R} \setminus [0, 1]$ et

$$f_Y(y) = \int_0^y \frac{1}{x} dx = 1,$$

pour tout $y \in [0, 1]$.

Les variables X et Y sont indépendantes si et seulement si $f_{X,Y}(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus Z'$, où Z' est un ensemble négligeable. Dans ce cas, $f_X(x)f_Y(y) = -\ln(x)$, pour tout $(x, y) \in [0, 1]^2 \setminus D$, ce qui est impossible. Comme $[0, 1]^2 \setminus D$ a mesure positive, on conclut que X et Y ne sont pas indépendantes.

2. On voit bien que

$$F_{U,V}(u, v) = \mathbb{P}(\{U \leq u, V \leq v\}) = \mathbb{P}(\{Y \leq uX, Y \leq v\}) = \iint_{D_{u,v}} f(x, y) dx dy,$$

où $D_{u,v} = \{(x, y) \in \mathbb{R}_{\geq 0}^2 : y \leq ux, y \leq v\}$. Cela implique que $F_{U,V}(u, v) = 0$ si $u \leq 1$ ou $v \leq 0$. Si $u > 1$ et $v > 0$, alors

$$F_{U,V}(u, v) = \iint_{D_{u,v}} dx dy = \int_0^{\min(v,1)} \int_{y/u}^y \frac{1}{y} dx dy = \int_0^{\min(v,1)} \frac{u-1}{u} dy = \frac{(u-1) \min(v,1)}{u}.$$

3. On voit bien que

$$F_U(u) = \mathbb{P}(\{U \leq u\}) = \mathbb{P}(\{Y \leq uX\}) = \iint_{D_u} f(x, y) dx dy,$$

où $D_u = \{(x, y) \in \mathbb{R}_{\geq 0}^2 : y \leq ux\}$. Cela implique que $F_U(u) = 0$ si $u \leq 1$. Si $u > 1$, alors

$$F_U(u) = \iint_{D_u} dx dy = \int_0^1 \int_{y/u}^y \frac{1}{y} dx dy = \int_0^1 \frac{u-1}{u} dy = \frac{u-1}{u}.$$

En outre, on sait que $F_V(v) = F_Y(v) = 0$ si $y \leq 0$, et

$$F_V(v) = \int_0^v f_Y(y) dy = \int_0^{\min(v,1)} 1 dy = \min(v, 1),$$

si $y \geq 0$. Cela nous dit que $F_{U,V}(u, v) = F_U(u)F_V(v)$, pour tout $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, ce qui nous dit que U et V sont indépendantes.

□

Exercice 165 *Loi de Benford* Soit $E = \{1, \dots, 9\}$. Pour $k \in E$, soit $p_k = \log_{10}(1 + 1/k)$.

1. Montrer que p_1, \dots, p_9 définissent une probabilité sur E .
2. Dessiner son histogramme et sa fonction de répartition.
3. Relever dans le journal 1000 nombres correspondant aux chiffres de la bourse et calculer la fréquence du premier chiffre de ces nombres. Comparer avec les probabilités précédentes.
4. Soit (X, Y) la variable aléatoire à valeurs dans $E \times (E \cup \{0\})$ définie par

$$\mathbb{P}(\{(X, Y) = (x, y)\}) = \log_{10} \left(1 + \frac{1}{10x + y} \right),$$

pour tout $(x, y) \in E \times (E \cup \{0\})$. Donner la loi de X .

Proof.

1. C'est clair que

$$\sum_{i=1}^9 p_i = \sum_{i=1}^9 \log_{10} \left(\frac{k+1}{k} \right) = \log_{10} \left(\prod_{i=1}^9 \frac{k+1}{k} \right) = \log_{10} \left(\frac{10}{1} \right) = 1.$$

2. La fonction de répartition est donné par

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in \mathbb{R}_{<0}, \\ \sum_{i=1}^{\lfloor x \rfloor} p_i, & \text{si } x \in \mathbb{R}_{\geq 0}, \end{cases}$$

où $\lfloor x \rfloor$ est la partie entière de x . On laisse à l'étudiant le dessin de l'histogramme de la fonction de masse et de la fonction de répartition.

3. On laisse cette partie de l'exercice à l'étudiant.
4. On voit bien que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\{X = x\}) &= \sum_{y=0}^9 \mathbb{P}(\{(X, Y) = (x, y)\}) = \sum_{y=0}^9 \log_{10} \left(1 + \frac{1}{10x + y} \right) \\ &= \log_{10} \left(\prod_{i=0}^9 \frac{10x + y + 1}{10x + y} \right) = \log_{10} \left(\frac{10(x+1)}{10x} \right) = \log_{10} \left(\frac{x+1}{x} \right), \end{aligned}$$

pour tout $x \in E$, et zéro sinon.

□

Exercice 166 *Loi de Benford (suite)* Soit x un nombre réel positif.

1. Montrer qu'il peut s'écrire de façon unique sous la forme $x = y10^n$, où $n \in \mathbb{Z}$ et $1 \leq y < 10$. On parle d'écriture scientifique.
2. Montrer que n est donné par la partie entière de $\log_{10} x$ et donc que $\log_{10} y$ est la partie fractionnaire de $\log_{10} x$, *i.e.* le nombre moins sa partie entière.
3. On suppose que X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}_{>0}$. Soit $X = Y10^N$ son écriture scientifique. On dira que la loi de X est *invariante par changement d'échelle* si pour tout $\lambda > 0$, si $\lambda X = Y'10^{N'}$ est l'écriture scientifique de λX , alors Y et Y' ont la même loi. On peut montrer que ceci est réalisé si et seulement si $\log_{10} Y$ suit la loi uniforme sur $[0, 1]$. On va montrer le sens facile.
 - (i) Soit $\lambda = \lambda_0 10^{n_0}$ l'écriture scientifique associée. Exprimer $\log_{10} Y'$ en fonction de λ_0 et de $\log_{10} Y$.
 - (ii) Soit $a \in [0, 1]$ et soit Z une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1]$. Montrer que la partie fractionnaire de $U = a + Z$ suit la loi uniforme sur $[0, 1]$.
Indication : calculer la fonction de répartition de la partie fractionnaire de U .
 - (iii) On suppose que $\log_{10}(Y)$ suit la loi uniforme sur $[0, 1]$. Soit $\lambda > 0$ et $\lambda X = Y'10^{N'}$ comme ci-dessous. Montrer que $\log_{10}(Y')$ suit la loi uniforme sur $[0, 1]$.
 - (iv) Montrer que si $\log_{10}(Y)$ suit la loi uniforme sur $[0, 1]$, alors la partie entière de Y suit la loi de Benford.

Proof.

1. On montre d'abord l'unicité. Soient $n, n' \in \mathbb{Z}$ et $y, y' \in [1, 10[$ tels que $x = y10^n = y'10^{n'}$. On suppose sans perte de généralité que $n < n'$. Cela implique que $y = y'10^{n'-n} \geq 10^{n'-n} \geq 10$, ce qui est absurde. En conséquence $n = n'$, ce qui implique que $y = y'$.
Pour montrer l'existence, on considère l'ensemble $A_x = \{m \in \mathbb{Z} : x \cdot 10^{-m} < 10\}$. C'est clair que A_x n'est pas vide, puisque $x/10^m$ tend vers zéro quand m tend vers $+\infty$, et que A_x est minoré, puisque $x/10^m$ tend vers $+\infty$ quand m tend vers $-\infty$. Soit $n = \min\{m \in \mathbb{Z} : x \cdot 10^{-m} < 10\}$. Alors $x \cdot 10^{-n} < 10$. Si $x \cdot 10^{-n} < 1$, alors $x \cdot 10^{-(n-1)} < 10$, ce qui implique que n n'est pas le minimum de A_x . En conséquence, $x \cdot 10^{-n} \geq 1$. Soit $y = x \cdot 10^{-n}$. On conclut que $x = y10^n$, avec $y \in [1, 10[$ et $n \in \mathbb{Z}$.
2. Si $x = y10^n$, alors $\log_{10}(x) = \log_{10}(y) + n$, avec $\log_{10}(y) \in [0, 1[$. En conséquence, $n = \lfloor \log_{10}(x) \rfloor$. Cela implique que $\log_{10}(y) = \log_{10}(x) - \lfloor \log_{10}(x) \rfloor$ est la partie fractionnaire de $\log_{10} x$.
3. (i) Comme $Y'10^{N'} = \lambda X = \lambda Y 10^N = \lambda_0 Y 10^{N+n_0}$, on voit que

$$\log_{10}(Y') + N' = \log_{10}(\lambda_0) + \log_{10}(Y) + N + n_0,$$

ce qui implique que $\log_{10}(Y') = \lfloor \log_{10}(\lambda_0) + \log_{10}(Y) \rfloor$.

- (ii) Soit $M = \lfloor U \rfloor$ et $V = U - M$. C'est clair que la fonction de répartition F_V de V satisfait que $F_V(v) = 0$ si $v < 0$ et $F_V(v) = 1$ si $v \geq 1$. Soit $v \in [0, 1[$. On voit bien que $\{V \leq v\} = \{1 - a \leq Z \leq 1 - a + v\} \sqcup \{Z \leq v - a\}$. L'union est disjointe puisque $v < 1$. Cela implique que

$$\begin{aligned} F_V(v) &= \mathbb{P}(\{1 - a \leq Z \leq 1 - a + v\}) + \mathbb{P}(\{Z \leq v - a\}) \\ &= \min(1 + v - a, 1) - (1 - a) + \max(v - a, 0) = v. \end{aligned}$$

En conséquence, V suit la loi uniforme sur $[0, 1]$.

(iii) Comme $\log_{10}(\lambda_0) \in [0, 1]$ et $\log_{10}(Y)$ suit la loi uniforme sur $[0, 1]$, l'item précédent nous dit que $\log_{10}(Y') = \lfloor \log_{10}(\lambda_0) + \log_{10}(Y) \rfloor$ suit la loi uniforme sur $[0, 1]$.

(iv) Soit $i \in \llbracket 1, 9 \rrbracket$. On voit bien que

$$\mathbb{P}(\{\lfloor Y \rfloor \leq i\}) = \mathbb{P}(\{Y < i\}) = \mathbb{P}(\{\log_{10}(Y) < \log_{10}(i)\}) = \log_{10}(i) = p_i,$$

où l'on utilise la notation de l'exercice précédent. Comme $p_1 + \dots + p_9 = 1$, $\lfloor Y \rfloor$ est une variable aléatoire discrète qui suit la loi de Benford.

□

Exercice 167 *Loi sans mémoire* Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}_{>0}$ telle que

$$\mathbb{P}(\{X > x + y\} | \{X > x\}) = \mathbb{P}(\{X > y\}),$$

pour tous $x, y \in \mathbb{R}_{>0}$.

1. Montrer que

$$\mathbb{P}(\{X > x + y\}) = \mathbb{P}(\{X > x\})\mathbb{P}(\{X > y\}),$$

pour tous $x, y \in \mathbb{R}_{>0}$.

2. Soit $\varphi : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\varphi(x) = \mathbb{P}(\{X > x\})$. Notons $a = \varphi(1)$. On a donc $a \in [0, 1]$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\varphi(n) = a^n$ et que pour tout $q \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$, $\varphi(q) = a^q$. Peut-on avoir $a = 0$? Et $a = 1$?

3. Montrer que φ est une fonction décroissante. En utilisant le fait que tout réel est limite d'une suite décroissante (respectivement, croissante) de rationnels, déterminer $\varphi(x)$ pour $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.

4. Déterminer la loi de X .

Proof.

1. On voit bien que

$$\mathbb{P}(\{X > x + y\}) = \mathbb{P}(\{X > x + y\} | \{X > x\})\mathbb{P}(\{X > x\}) = \mathbb{P}(\{X > y\})\mathbb{P}(\{X > x\}),$$

pour tous $x, y \in \mathbb{R}_{>0}$.

2. On remarque d'abord que, comme X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}_{>0}$, $\varphi(0) = \mathbb{P}(\{X > 0\}) = 1$. L'item précédent nous dit que

$$\varphi((n+1)x) = \varphi(nx)\varphi(x), \tag{26}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}_{>0}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. En particulier, un argument par récurrence nous dit que

$$\varphi(nx) = \varphi(x)^n, \tag{27}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}_{>0}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Si $x = 1$, on trouve que $\varphi(n) = a^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Par ailleurs, si $q = m/n \in \mathbb{Q}$, avec $(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, alors

$$\varphi(q)^n = \varphi(nq) = \varphi(m) = \varphi(1)^m,$$

ce qui nous dit que $\varphi(q) = \varphi(1)^{m/n}$.

Le cas $a = 0$ est impossible. En effet, par définition de X , l'espace probabilisé sous-jacent Ω satisfait que

$$\Omega = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \{X > 1/n\}.$$

Comme la suite d'évènements $(\{X > n\})_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante, alors

$$1 = \mathbb{P}(\Omega) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(\{X > 1/n\}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi(1/n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} 0^{1/n} = 0,$$

ce qui est absurde. On va montrer aussi que $a \neq 1$. En effet, si $a = 1$, $\varphi(n) = 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. La suite d'évènements $(\{X > n\})_{n \in \mathbb{N}^*}$ étant décroissante, on conclut que

$$1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(\{X > n\}) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \{X > n\}\right) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0,$$

ce qui est absurde. En conséquence, $0 < a < 1$.

3. Comme $\{X > x\} \subseteq \{X > y\}$ si $x \geq y$, on voit bien que φ est décroissante. Soit $x \in \mathbb{R}_{>0}$ et soient $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{Q}_{>0}^{\mathbb{N}}$ deux suites telles que $x_n \leq x \leq y_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $|y_n - x_n|$ tend vers zéro quand n tend vers $+\infty$. Alors, $\varphi(y_n) \leq \varphi(x) \leq \varphi(x_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ nous dit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a^{y_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi(y_n) \leq \varphi(x) \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi(x_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} a^{x_n},$$

ce qui implique que $\varphi(x) = a^x$.

4. On conclut que $F_X(x) = \mathbb{P}(\{X \leq x\}) = 1 - \mathbb{P}(\{X > x\}) = 1 - \varphi(x) = 1 - a^x = 1 - e^{-\lambda x}$, pour tout $x > 0$ et $F_X(x) = 0$ si $x < 0$, où $\lambda = \ln(-a) \in \mathbb{R}_{>0}$. Alors, X admet une densité donnée par $f_X = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_{>0}}(x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, *i.e.* X est une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre λ .

□

Exercice 168 Soit F une fonction strictement croissante et continue d'un intervalle ouvert I dans $]0, 1[$. Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $]0, 1[$. Déterminer la loi de $X = F^{-1}(U)$. Utiliser ceci pour construire à partir d'une loi uniforme une variable aléatoire Y de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

Proof. On note d'abord que, comme $F : I \rightarrow]0, 1[$ est strictement monotone et continue, elle est bijective. On définit la fonction $\bar{F} : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ donnée par $\bar{F}(x) = 0$ si $x \leq \inf I$, $\bar{F}(x) = F(x)$ si $x \in I$, et $\bar{F}(x) = 1$ si $x \geq \sup I$, où la première (resp., troisième) condition est vide si $\inf I = -\infty$ (resp., $\sup I = +\infty$). En outre, F étant strictement croissante, on a $\{F^{-1}(U) \leq x\} = \{U \leq F(x)\}$, pour tout $x \in I$, ce qui dit que

$$F_X(x) = \mathbb{P}(\{F^{-1}(U) \leq x\}) = \mathbb{P}(\{U \leq F(x)\}) = F(x),$$

pour tout $x \in I$, où F_X est la fonction de répartition de X . Par définition de fonction de répartition, on voit que $F_X(x) = 0$ si $x \leq \inf I$ et $\bar{F}(x) = 1$ si $x \geq \sup I$. En conséquence, $F_X = \bar{F}$.

Pour construire une variable aléatoire Y de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ à partir de la variable aléatoire U de loi uniforme $]0, 1[$, on pose $F : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow]0, 1[$ via $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$, pour tout $x > 0$. C'est clair que F est différentiable (et, en particulier, continue) et $F'(x) = \lambda e^{-\lambda x} > 0$, pour tout $x > 0$, ce qui nous dit que F est strictement croissante. Alors $Y = F^{-1}(U)$ a fonction de répartition $\bar{F} : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ donnée par $\bar{F}(x) = 0$ si $x \leq 0$, et $\bar{F}(x) = F(x)$ si $x > 0$, *i.e.* Y est une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. □

Exercice 169 Une formule pour l'espérance Soit X une variable aléatoire positive admettant une espérance. On suppose que la loi de X admet une densité f et on note F sa

fonction de répartition. Montrer que si $x > 0$,

$$x(1 - F(x)) \leq \int_x^{+\infty} tf(t)dt.$$

En déduire que $x(1 - F(x))$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$. Montrer que

$$E[X] = \int_0^{+\infty} (1 - F(t))dt.$$

Proof. On note d'abord que $f(x) = 0$ si $x < 0$. On rappelle que X admet une espérance si et seulement si $x \mapsto xf(x)$ est une fonction intégrable sur $\mathbb{R}_{\geq 0}$. On voit bien que

$$\int_x^{+\infty} tf(t)dt \geq x \int_x^{+\infty} f(t)dt = x \left(1 - \int_{-\infty}^x f(t)dt \right) = x(1 - F(x)) \geq 0,$$

pour tout $x > 0$. Comme X admet une espérance, i.e. $\int_0^{+B} tf(t)dt$ converge quand B tend vers $+\infty$, alors $\int_x^{+\infty} tf(t)dt$ tend vers zéro quand x tend vers $+\infty$. L'inégalité précédente nous dit alors que $x(1 - F(x))$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.

Finalement,

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_0^{+\infty} xf(x)dx = \int_0^{+\infty} \int_0^x f(x)dydx = \iint_D f(x)dx dy \\ &= \int_0^{+\infty} \int_y^{+\infty} f(x)dx dy = \int_0^{+\infty} (1 - F(y))dy, \end{aligned}$$

où $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y < x\}$ et on a utilisé le théorème de Fubini. \square

Exercice 170 Soit X une variable aléatoire de loi uniforme sur $[-1, 1]$. Donner la loi de X^2 , son espérance et sa variance.

Proof. On voit bien que la fonction de répartition de X^2 satisfait que $F_{X^2}(y) = 0$ si $y < 0$, puisque $\{X^2 \leq y\} = \emptyset$ si $y < 0$. En outre,

$$F_{X^2}(y) = \mathbb{P}(\{X^2 \leq y\}) = \mathbb{P}(\{-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}\}) = \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f_X(x)dx,$$

pour tout $y \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, où f_X est la densité de X . Cela nous dit que

$$F_{X^2}(y) = \begin{cases} 0, & \text{si } y \in \mathbb{R}_{<0}, \\ \sqrt{y}, & \text{si } y \in [0, 1], \\ 1, & \text{si } y \in \mathbb{R}_{\geq 1}. \end{cases}$$

En conséquence, la densité de X^2 est

$$f_{X^2}(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} \mathbb{1}_{]0,1[}(y),$$

pour tout $y \in \mathbb{R}$.

Par ailleurs,

$$E[X^2] = \int_{\mathbb{R}} y f_{X^2}(y) dy = \int_0^1 \frac{\sqrt{y}}{2} dy = \left[\frac{\sqrt{y^3}}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

En outre,

$$\begin{aligned} \text{Var}[X^2] &= \int_{\mathbb{R}} \left(y - \frac{1}{3} \right)^2 f_{X^2}(y) dy = \int_0^1 \left(\frac{\sqrt{y^3}}{2} - \frac{\sqrt{y}}{3} + \frac{1}{18\sqrt{y}} \right) dy \\ &= \left[\frac{\sqrt{y}}{45} (9y^2 - 10y + 5) \right]_0^1 = \frac{4}{45}. \end{aligned}$$

□

Exercice 171 *Paradoxe de Bertrand : Choisir une corde au hasard*

1. Choisir un point P au hasard à l'intérieur d'un cercle de rayon a . Soit X la longueur de la corde dont P est le milieu. Montrer que $\mathbb{P}(\{X > \sqrt{3}a\}) = \frac{1}{4}$.
2. On choisit deux points A et B au hasard et indépendamment l'un de l'autre sur un cercle de rayon a . Soit X la longueur de la corde AB . Montrer que $\mathbb{P}(\{X > \sqrt{3}a\}) = \frac{1}{3}$.

Proof. On considère le disque $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq a^2\}$ et sa frontière $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = a^2\}$. Une corde quelconque du cercle S est donnée par le segment $L_{A,B} = \{tA + (1-t)B : t \in [0, 1]\}$, avec $A, B \in S$. C'est clair que $L_{A,B} = L_{A',B'}$ si et seulement si $(A, B) = (A', B')$ ou $(A, B) = (B', A')$. On note $\Omega = \{L_{A,B} : A, B \in S\}$ l'ensemble formé des cordes du cercle S et $\Omega_0 = \{L_{A,-A} : A \in S\} \subseteq \Omega$. On considère l'application $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par $X(L_{A,B}) = \|B - A\|$, où l'on a utilisé la norme euclidienne de \mathbb{R}^2 . Comme $X(L_{A,B}) = X(L_{B,A})$, X est bien définie.

1. Soit $\varphi : \Omega \rightarrow D$ l'application donnée par $\varphi(L_{A,B}) = (A + B)/2$. Comme $\varphi(L_{A,B}) = \varphi(L_{B,A})$, φ est bien définie. En plus, c'est facile à voir que $\varphi(\Omega_0) = (0, 0)$ et que la restriction $\varphi|_{\Omega \setminus \Omega_0}$ est injective avec image $D \setminus \{(0, 0)\}$, que l'on notera \dot{D} . Noter que φ est une application surjective. Dans ce cas, l'espace probabilisé est Ω muni de la tribu $\mathcal{B}_1 = \{\varphi^{-1}(E) : E \subseteq D \text{ est borélien}\}$, et de la probabilité

$$\mathbb{P}_1(\varphi^{-1}(E)) = \frac{\text{Aire}(E)}{\text{Aire}(D)}.$$

Cela implique que l'on identifie l'action "prendre une corde au hasard" avec l'action "prendre le milieu de la corde au hasard". C'est facile à vérifier que X est une variable aléatoire pour cet espace probabilisé, *i.e.* $X^{-1}([a, b]) \in \mathcal{B}_1$, pour tous $a \leq b$. Comme $L_{A,B}$ est orthogonal au segment formé par l'origine $(0, 0)$ et $(A + B)/2$, on conclut que $\varphi(\{X > \sqrt{3}a\}) = \{(x, y) \in D : x^2 + y^2 < a^2/4\}$, ce qui nous dit que

$$\mathbb{P}_1(\{X > \sqrt{3}a\}) = \frac{\pi a^2/4}{\pi a^2} = \frac{1}{4}.$$

2. Soit $\psi : \mathbb{R} \rightarrow S$ l'application donnée par $\psi(\theta) = (a \cos(\theta), a \sin(\theta))$. C'est clair que $\psi|_{[0, 2\pi[}$ est une bijection. Soit $\Psi : [0, 2\pi[\rightarrow \Omega$ l'application donnée par $\Psi(\theta, \theta') = L_{\psi(\theta), \psi(\theta')}$. Noter que Ψ est surjective. Soit $\mathcal{T} = \{T \subseteq [0, 2\pi[: T \text{ est borélien}\}$. Dans ce cas, l'espace probabilisé est Ω muni de la tribu $\mathcal{B}_2 = \{\Psi(T) : T \in \mathcal{T}\}$, et de la probabilité

$$\mathbb{P}_2(\Psi(T)) = \frac{\text{Aire}(T)}{4\pi^2}.$$

On remarque que \mathcal{B}_2 est une tribu, puisque $\emptyset = \Psi(\emptyset)$, $\Psi(\cup_{i \in I} T_i) = \cup_{i \in I} \Psi(T_i)$ pour toute famille $(T_i)_{i \in I} \in \mathcal{T}^I$, et

$$\Omega \setminus \Psi(T) = \Psi\left([0, 2\pi]^2 \setminus \Psi^{-1}(\Psi(T))\right),$$

pour tout $T \in \mathcal{T}$, vu que Ψ est une application surjective. Ce modèle donne une façon d'identifier l'action "prendre une corde au hasard" avec l'action "prendre les extrémités de la corde au hasard". C'est facile à vérifier que X est une variable aléatoire pour cet espace probabilisé, *i.e.* $X^{-1}([a, b]) \in \mathcal{B}_2$, pour tous $a \leq b$. Dans ce cas, on voit bien que $\Psi^{-1}(\{X > \sqrt{3}a\}) = \{(\theta, \theta') \in [0, 2\pi]^2 : |\theta'| < 2\pi/3\}$, ce qui nous dit que

$$\mathbb{P}_2(\{X > \sqrt{3}a\}) = \frac{4\pi^2/3}{4\pi^2} = \frac{1}{3}.$$

□

Exercice 172 *Vont-ils se rencontrer?* Paul et Virgine arrivent dans le parc indépendamment l'un de l'autre et de manière uniforme entre 12h et 13h. Chacun attend un quart d'heure et s'en va si l'autre n'est pas là. On pose la question : Quelle est la probabilité qu'ils se rencontrent ? En notant X l'heure d'arrivée de Virginie et Y l'heure d'arrivée de Paul, traduire mathématiquement sur X et Y les hypothèses. Répondre ensuite à la question.

Proof. On suppose que X et Y sont variables aléatoires indépendantes qui suivent la loi uniforme sur $[12, 13]$. Cela implique que la fonction de densité de (X, Y) est $\mathcal{K}_{[12,13] \times [12,13]}$. On veut calculer $\mathbb{P}(\{|X - Y| \leq 1/4\})$. C'est facile à voir que

$$\mathbb{P}(\{|X - Y| \leq 1/4\}) = \iint_D dx dy = \text{Aire}(D),$$

où $D = \{(x, y) \in [12, 13] \times [12, 13] : |x - y| \leq 1/4\}$. C'est facile à voir que l'aire de D est l'aire du carré $[12, 13] \times [12, 13]$ moins les aires de 2 triangles rectangles isocèles de côte de longueur $3/4$, *i.e.*

$$\text{Aire}(D) = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16}.$$

□

Exercice 173 *Quelques calculs avec la loi uniforme* Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes de loi uniforme sur $[0, 1]$. On définit les variables aléatoires $U = \inf(X, Y)$ et $V = \sup(X, Y)$.

1. Déterminer la fonction de répartition $F_{U,V}$ du couple (U, V) . En déduire la densité $f_{U,V} = 2\mathcal{K}_T$, où $T = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq u \leq v \leq 1\}$. Est-ce que U et V sont indépendantes ?
2. Quelles sont les densités f_U et f_V des lois de U et V ? En déduire $E[U]$ et $E[V]$.
3. Quelle est la densité de $S = U + V$? $E[S]$? Quelle est la loi de $X + Y$?
4. Calculer $\text{Var}[U]$, $\text{Var}[V]$, $\text{Cov}(U, V)$ et $\rho_{U,V}$.

Proof.

1. On remarque d'abord que la fonction de répartition F d'une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1]$ est $F(z) = \min(\max(z, 0), 1) = \max(\min(z, 1), 0)$, pour tout

$z \in \mathbb{R}$. Comme

$$\begin{aligned} \{U \leq u, V \leq v\} &= \underbrace{(\{X \leq u\} \cup \{Y \leq u\})}_{\{U \leq u\}} \cap \underbrace{(\{X \leq v\} \cap \{Y \leq v\})}_{\{V \leq v\}} \\ &= \{X \leq \min(u, v), Y \leq v\} \cup \{X \leq v, Y \leq \min(u, v)\} \end{aligned}$$

et

$$\{X \leq \min(u, v), Y \leq v\} \cap \{X \leq v, Y \leq \min(u, v)\} = \{X \leq \min(u, v), Y \leq \min(u, v)\},$$

alors

$$\begin{aligned} F_{U,V}(u, v) &= F_{X,Y}(\min(u, v), v) + F_{X,Y}(v, \min(u, v)) - F_{X,Y}(\min(u, v), \min(u, v)) \\ &= F_X(\min(u, v))F_Y(v) + F_X(v)F_Y(\min(u, v)) - F_X(\min(u, v))^2 \\ &= 2 \max(\min(u, v, 1), 0) \max(\min(v, 1), 0) - \max(\min(u, v, 1), 0)^2, \end{aligned}$$

où l'on a utilisé que X et Y sont indépendantes dans la deuxième égalité, et l'expression générique de la fonction de répartition d'une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1]$ dans la dernière égalité. En particulier, si $v \leq 0$ ou $u \leq 0$, $F_{U,V}(u, v) = 0$. Par ailleurs, si $0 \leq u, v$, alors

$$F_{U,V}(u, v) = 2 \min(u, v, 1) \min(v, 1) - \min(u, v, 1)^2,$$

ce qui dit que, si $u, v \geq 1$, $F_{U,V}(u, v) = 1$. En outre, c'est clair que, si $0 \leq v \leq u$, alors $F_{U,V}(u, v) = \min(v, 1)^2$, tandis que si $0 \leq u \leq 1 \leq v$, $F_{U,V}(u, v) = u(2 - u)$, et si $0 \leq u \leq v \leq 1$, $F_{U,V}(u, v) = u(2v - u)$.

On va montrer que la densité du couple (U, V) est donnée par $f_{U,V} = 2\mathbb{1}_T$, où $T = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq u \leq v \leq 1\}$. En effet, c'est clair que

$$\int_{-\infty}^u \int_{-\infty}^v 2\mathbb{1}_T(s, t) dt ds = \begin{cases} 0, & \text{si } u \leq 0 \text{ ou } v \leq 0, \\ u^2 + 2u(\min(v, 1) - u), & \text{si } 0 \leq u \leq v \text{ et } u \leq 1, \\ v^2, & \text{si } 0 \leq v \leq u \text{ et } v \leq 1, \\ 1, & \text{si } u, v \geq 1, \end{cases}$$

ce qui coïncide avec la $F_{U,V}$ décrite ci-dessus.

Finalement, comme

$$F_{U,V}(3/4, 1/4) = \frac{1}{16} \neq \frac{15}{16^2} = \frac{15}{16} \frac{1}{16} = F_U(3/4)F_V(1/4),$$

on conclut que U et V ne sont pas indépendantes.

2. Comme

$$f_U(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{U,V}(u, v) dv,$$

pour tout $u \in \mathbb{R} \setminus Z$, avec Z négligeable, c'est clair que l'application $f_U(u) = 0$, si $u \notin [0, 1]$, et $f_U(u) = 2(1 - u)$, si $u \in [0, 1]$, est une densité de U . Le même argument nous dit que

$$f_V(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{U,V}(u, v) du,$$

pour tout $v \in \mathbb{R} \setminus Z'$, avec Z' négligeable, ce qui nous dit que l'application $f_V(v) = 0$, si $v \notin [0, 1]$, et $f_V(v) = 2v$, si $v \in [0, 1]$, est une densité de V .

On voit bien que

$$E[U] = \int_0^1 u f_U(u) du = \int_0^1 2(u - u^2) du = \frac{1}{3}$$

et

$$E[V] = \int_0^1 v f_V(v) dv = \int_0^1 2v^2 dv = \frac{2}{3}.$$

3. On voit que $S = U + V = X + Y$, ce qui nous dit que

$$F_S(s) = \mathbb{P}(\{S \leq s\}) = \iint_{D_s} f_{X,Y}(x,y) dx dy,$$

où $D_s = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \leq s\}$. En conséquence, $F_S(s) = 0$ si $s \leq 0$, $F_S(s) = 1$ si $s \geq 2$, $F_S(s) = \frac{s^2}{2}$ si $s \in [0, 1]$, et

$$F_S(s) = 1 - \frac{(2-s)^2}{2} = 2s - 1 - \frac{s^2}{2},$$

si $s \in [1, 2]$. En conséquence, la densité de S est

$$f_S(s) = \begin{cases} 0, & \text{si } s \in \mathbb{R} \setminus [0, 2], \\ s, & \text{si } s \in [0, 1], \\ 2 - s, & \text{si } s \in [1, 2]. \end{cases}$$

Noter que $E[S] = E[U] + E[V] = 1$.

4. Comme $\text{Var}[U] = E[U^2] - E[U]^2$, il suffit de calculer

$$E[U^2] = \int_0^1 u^2 f_U(u) du = \int_0^1 2(u^2 - u^3) du = \frac{1}{6},$$

ce qui donne $\text{Var}[U] = 1/18$. De même, d'après $\text{Var}[V] = E[V^2] - E[V]^2$, il suffit de calculer

$$E[V^2] = \int_0^1 v^2 f_V(v) du = \int_0^1 2v^3 dv = \frac{1}{2},$$

ce qui donne $\text{Var}[V] = 1/18$.

Par ailleurs, comme $\text{Cov}(U, V) = E[UV] - E[U]E[V]$, on calcule d'abord

$$E[UV] = \int_0^1 \int_0^1 uv f_{U,V}(u, v) dudv = 2 \int_0^1 \int_0^v uv dudv = \frac{1}{4},$$

ce qui implique que $\text{Cov}(U, V) = 1/36$.

Finalement, $\rho_{U,V} = \text{Cov}(U, V) / \sqrt{\text{Var}[U] \text{Var}[V]} = 1/2$.

□

Exercice 174 *Problème de l'aiguille de Buffon* Une aiguille de longueur ℓ est jetée "au hasard" sur un plan qui est strié par des parallèles (*i.e.* les rainures du parquet) situées à distance $d > \ell$ les unes des autres. Soit X la variable aléatoire donnée par la distance du milieu de l'aiguille à la parallèle la plus proche et Θ celle donnée par l'angle orienté entre une strie et l'aiguille. On traduit l'hypothèse "jeter au hasard" par le fait que le couple

(X, Θ) suit la loi uniforme sur $[0, d/2] \times [0, \pi]$. Quelle probabilité a-t-on que l'aiguille coupe une parallèle ?

Proof. Il faut calculer

$$\mathbb{P}(\{X \leq \frac{d}{2} \sin(\Theta)\}) = \frac{2}{\pi d} \iint_D dx d\theta = \frac{2}{\pi d} \text{Aire}(D),$$

où $D = \{(\theta, x) \in [0, \pi] \times [0, d/2] : 2x \leq d \sin(\theta)\}$. C'est clair que

$$\text{Aire}(D) = \int_0^\pi \frac{d}{2} \sin(\theta) d\theta = \frac{d}{2} \left[-\cos(\theta) \right]_0^\pi = d.$$

Cela nous dit que la probabilité demandée est $2/\pi$. \square

Exercice 175 Rapport de deux exponentielles Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes suivant les lois exponentielles de paramètres $\lambda > 0$ et $\mu > 0$, respectivement. Déterminer la fonction de répartition et la densité de la variable aléatoire réelle $U = Y/X$.

Proof. On va calculer $F_U(u) = \mathbb{P}(\{U \leq u\})$, pour tout $u \in \mathbb{R}$. Comme $\{U \leq u\}$ est vide, pour tout $u \leq 0$, puisque $\{X \leq z\} = \{Y \leq z\} = \emptyset$ pour tout $z \leq 0$, on voit que $F_U(u) = 0$, si $u \in \mathbb{R}_{\leq 0}$. Par ailleurs, si $u > 0$,

$$F_U(u) = \mathbb{P}(\{U \leq u\}) = \mathbb{P}(\{Y \leq uX\}) = \iint_{D_u} f_{X,Y}(x,y) dx dy,$$

où $D_u = \{(x,y) \in \mathbb{R}_{>0}^2 : y \leq ux\}$. Comme X et Y sont variables aléatoires indépendantes, $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Alors, $f_{X,Y}(x,y) = \mathbb{1}_{\mathbb{R}_{>0}^2}(x,y) \lambda \mu e^{-\lambda x - \mu y}$, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, et

$$\begin{aligned} F_U(u) &= \iint_{D_u} \lambda \mu e^{-\lambda x - \mu y} dx dy = \lambda \mu \int_0^{+\infty} \int_{y/u}^{+\infty} e^{-\lambda x - \mu y} dx dy \\ &= \mu \int_0^{+\infty} e^{-(\mu + \lambda/u)y} dy = \frac{\mu u}{\lambda + \mu u}, \end{aligned}$$

pour tout $u > 0$.

La densité de U est donnée par

$$f_U(u) = \begin{cases} 0, & \text{si } u \in \mathbb{R}_{\leq 0}, \\ \frac{\lambda \mu}{(\lambda + \mu u)^2}, & \text{si } u \in \mathbb{R}_{> 0}. \end{cases}$$

\square

Exercice 176 Soit f la densité de probabilité d'une variable aléatoire réelle $Z > 0$. On pose

$$g(x,y) = \frac{1}{x+y} f(x+y) \mathbb{1}_{\{x>0, y>0\}}.$$

1. Montrer que g est une densité d'un couple (X, Y) de variables aléatoires réelles (strictement) positives.

2. Exprimer $E[X]$, $E[Y]$, $\text{Var}[X]$, $\text{Var}[Y]$ et $\text{cov}(X, Y)$ à l'aide de $E[Z]$ et de $E[Z^2]$.

Proof.

1. On rappelle qu'une fonction $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est une densité d'un couple de variables aléatoires réelles (resp., strictement positives) si et seulement si $\text{Im}(g) \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$, g est intégrable et

$$\iint_{\mathbb{R}^2} g(x, y) dx dy = 1 \quad (\text{resp., avec } g(x, y) = 0 \text{ pour tout } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{R}_{> 0}^2).$$

Dans ce cas, il suffit de montrer que

$$\iint_{\mathbb{R}^2} g(x, y) dx dy = 1,$$

ce qui est vérifié puisque

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbb{R}^2} g(x, y) dx dy &= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{1}{x+y} f(x+y) dx dy = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \int_{-u}^u \frac{f(u)}{u} dv du \\ &= \int_0^{+\infty} f(u) du = 1, \end{aligned}$$

où l'on a utilisé le changement de variables $\Phi : U \rightarrow \mathbb{R}_{> 0}^2$ donné par

$$\Phi(u, v) = \left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2} \right),$$

pour tout $(u, v) \in U$, avec $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : 0 < u, -u < v < u\}$. Noter que la valeur absolue du déterminant de la matrice jacobienne de Φ en (u, v) est $1/2$, pour tout $(u, v) \in U$.

2. On voit bien que

$$\begin{aligned} E[X] &= \iint_{\mathbb{R}^2} xg(x, y) dx dy = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{x}{x+y} f(x+y) dx dy \\ &= \frac{1}{4} \int_0^{+\infty} \int_{-u}^u (u+v) \frac{f(u)}{u} dv du = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} u f(u) du = \frac{1}{2} E[Z] \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} E[Y] &= \iint_{\mathbb{R}^2} yg(x, y) dx dy = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{y}{x+y} f(x+y) dx dy \\ &= \frac{1}{4} \int_0^{+\infty} \int_{-u}^u (u-v) \frac{f(u)}{u} dv du = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} u f(u) du = \frac{1}{2} E[Z], \end{aligned}$$

où l'on a utilisé le changement de variables de l'item précédent et l'identité

$$\int_0^{+\infty} \int_{-u}^u v h(u) dv du = \int_0^{+\infty} \left[v^2 \right]_{-u}^u \frac{h(u)}{2} dv du = \int_0^{+\infty} 0 \frac{h(u)}{2} du = 0, \quad (28)$$

pour toute fonction $h : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ intégrable.

En outre, comme $\text{Var}[X] = E[X^2] - E[X]^2$ et $\text{Var}[Y] = E[Y^2] - E[Y]^2$, il suffit de calculer

$$\begin{aligned}
 E[X^2] &= \iint_{\mathbb{R}^2} x^2 g(x, y) dx dy = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{x+y} f(x+y) dx dy \\
 &= \frac{1}{8} \int_0^{+\infty} \int_{-u}^u (u+v)^2 \frac{f(u)}{u} dv du = \frac{1}{8} \int_0^{+\infty} \int_{-u}^u (u^2 + 2uv + v^2) \frac{f(u)}{u} dv du \\
 &= \frac{1}{8} \int_0^{+\infty} \int_{-u}^u (u^2 + v^2) \frac{f(u)}{u} dv du = \frac{1}{4} \int_0^{+\infty} \left(u^2 + \frac{u^2}{3} \right) f(u) du \\
 &= \frac{1}{3} \int_0^{+\infty} u^2 f(u) du = \frac{1}{3} E[Z^2]
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 E[Y^2] &= \iint_{\mathbb{R}^2} y^2 g(x, y) dx dy = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{y^2}{x+y} f(x+y) dx dy \\
 &= \frac{1}{8} \int_0^{+\infty} \int_{-u}^u (u-v)^2 \frac{f(u)}{u} dv du = \frac{1}{8} \int_0^{+\infty} \int_{-u}^u (u^2 - 2uv + v^2) \frac{f(u)}{u} dv du \\
 &= \frac{1}{8} \int_0^{+\infty} \int_{-u}^u (u^2 + v^2) \frac{f(u)}{u} dv du = \frac{1}{4} \int_0^{+\infty} \left(u^2 + \frac{u^2}{3} \right) f(u) du \\
 &= \frac{1}{3} \int_0^{+\infty} u^2 f(u) du = \frac{1}{3} E[Z^2],
 \end{aligned}$$

où l'on a utilisé le changement de variables de l'item précédent et (28) dans la cinquième égalité. En conséquence,

$$\begin{aligned}
 \text{Var}[X] &= E[X^2] - E[X]^2 = \text{Var}[Y] = E[Y^2] - E[Y]^2 \\
 &= \frac{1}{3} E[Z^2] - \frac{1}{4} E[Z]^2 = \frac{1}{3} \text{Var}[Z] + \frac{1}{12} E[Z]^2.
 \end{aligned}$$

Finalement, comme $\text{Cov}(X, Y) = E[XY] - E[X]E[Y]$, il suffit de calculer

$$\begin{aligned}
 E[XY] &= \iint_{\mathbb{R}^2} xy g(x, y) dx dy = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{xy}{x+y} f(x+y) dx dy \\
 &= \frac{1}{8} \int_0^{+\infty} \int_{-u}^u (u^2 - v^2) \frac{f(u)}{u} dv du = \frac{1}{4} \int_0^{+\infty} \left(u^2 - \frac{u^2}{3} \right) f(u) du \\
 &= \frac{1}{6} \int_0^{+\infty} u^2 f(u) du = \frac{1}{6} E[Z^2],
 \end{aligned}$$

ce qui nous dit que

$$\text{Cov}(X, Y) = E[XY] - E[X]E[Y] = \frac{1}{6} E[Z^2] - \frac{1}{4} E[Z]^2 = \frac{1}{6} \text{Var}[Z] - \frac{1}{12} E[Z]^2.$$

□

Exercice 177 *Discrétisation* Soit $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une variable aléatoire à valeurs réelles. On suppose que la loi de X admet une densité f sur \mathbb{R} et on note F sa fonction de répartition. Soit $\delta > 0$. On définit la variable aléatoire $X_\delta : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ par $X_\delta(\omega) = n\delta$, si $n \in \mathbb{Z}$ et $\omega \in \Omega$ satisfont que $(n-1)\delta < X(\omega) \leq n\delta$.

1. Déterminer la loi de X_δ . Donner la fonction de répartition F_δ de X_δ et montrer que F_δ converge simplement vers F quand δ tend vers 0.
2. On suppose que X admet une espérance. Montrer que X_δ admet une espérance m_δ et que m_δ tend vers $E[X]$ quand δ tend vers 0.

Proof.

1. On note d'abord que

$$\mathbb{P}(\{X_\delta = n\delta\}) = F_X(n\delta) - F_X((n-1)\delta),$$

ce qui implique que

$$F_\delta(n\delta) = \sum_{m=-\infty}^n \mathbb{P}(\{X_\delta = m\delta\}) = \sum_{m=-\infty}^n (F(n\delta) - F((n-1)\delta)) = F(n\delta),$$

pour tout $n \in \mathbb{Z}$. En conséquence,

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathbb{P}(\{X_\delta = n\delta\}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} F(n\delta) = 1.$$

Cela nous dit que X_δ est une variable aléatoire discrète.

En outre, $F_\delta(x) = F_\delta(n\delta) = F(n\delta)$, où $n \in \mathbb{Z}$ est donné par $(n-1)\delta < x \leq n\delta$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, soit $n \in \mathbb{Z}$ tel que $(n-1)\delta < x \leq n\delta$. En conséquence, $0 \leq n\delta - x \leq \delta$ et $|F_\delta(x) - F(x)| = |F(n\delta) - F(x)|$. Comme F est continue à droite, on conclut que $|F_\delta(x) - F(x)| = |F(n\delta) - F(x)|$ tend vers zéro, quand δ tend vers zéro, *i.e.* F_δ converge simplement vers F quand δ tend vers 0.

2. La variable X_δ est une approximation supérieure de Lebesgue de X . Son espérance m_δ est une somme supérieure de Lebesgue de X . Comme X admet une espérance, par définition, cette somme supérieure de Lebesgue m_δ est finie à partir d'un certain rang de δ et elle converge vers $E[X]$ quand δ tend vers 0.

□

Exercice 178 Régression linéaire Soit X et Y deux variables aléatoires réelles de variances non nulles.

On pose

$$\varrho_{X,Y} = \frac{\text{Cov}(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}, \quad \bar{X} = X - E[X] \text{ et } \bar{Y} = Y - E[Y],$$

où $\sigma_X = \sqrt{\text{Var}[X]}$ et $\sigma_Y = \sqrt{\text{Var}[Y]}$.

1. Montrer que $|\text{Cov}(X,Y)| = |E[\bar{X}\bar{Y}]| \leq \sigma_X \sigma_Y$. En déduire que $-1 \leq \varrho_{X,Y} \leq 1$.
2. Montrer que $|\varrho_{X,Y}| = 1$ si et seulement s'il existe a non nul et b tels que $\mathbb{P}(\{Y = aX + b\}) = 1$.
3. Préciser la valeur de $\varrho_{X,Y}$ si X et Y sont indépendantes.
4. On cherche la meilleure approximation de Y comme fonction affine de X au sens des moindres carrés, c'est-à-dire que l'on cherche les valeurs de a et b qui minimisent $E[(aX + b - Y)^2]$. Notons $\Phi(a,b) = E[(aX + b - Y)^2]$. Montrer que $\Phi(a,b) = E[(\bar{Y} - a\bar{X})^2] + (E[Y] - (aE[X] + b))^2$.

En déduire que le couple (a_0, b_0) qui minimise Φ vaut

$$a_0 = \varrho_{X,Y} \sigma_Y / \sigma_X \text{ et } b_0 = E[Y] - a_0 E[X].$$

On appelle la droite d'équation $y = a_0 x + b_0$ la *droite de régression linéaire* de Y en X .

5. On suppose que (X, Y) suit la loi uniforme sur un ensemble de cardinal n , *i.e.* il existe n points (x_i, y_i) dans le plan tels que $\mathbb{P}(\{X = x_i, Y = y_i\}) = 1/n$ pour tout $1 \leq i \leq n$. Déterminer la droite de régression linéaire de Y en X dans ce cas.

Proof.

1. Si σ_X ou σ_Y est infini, il n'y a rien à démontrer. On suppose désormais que σ_X ou σ_Y sont des nombres réels. Le résultat demandé s'agit d'une version du théorème de Cauchy-Schwarz, pour la forme bilinéaire positive (mais pas forcément définie) $(U, V) \mapsto E(UV)$. En effet, si V est une variable aléatoire qui satisfait que $E[V^2] \neq 0$, on pose $c = E[UV]/E[V^2]$ et on considère

$$0 \leq E[(U - cV)^2] = E[U^2] - \frac{E[UV]^2}{E[V^2]},$$

ce qui nous dit que $|E[UV]| \leq \sqrt{E[U^2]E[V^2]}$. C'est facile à vérifier que c est en fait le minimum de la fonction quadratique $c \mapsto E[(U - cV)^2]$. Si l'on utilise l'identité précédente pour $U = \bar{X}$ et $V = \bar{Y}$, on conclut que $|\text{Cov}(X, Y)| \leq \sigma_X \sigma_Y$ et $-1 \leq \rho_{X,Y} \leq 1$.

2. Le résultat demandé est aussi une conséquence du théorème de Cauchy-Schwarz, pour la forme bilinéaire positive définie ci-dessus. En effet, avec les hypothèses précédentes, $|E[UV]| = \sqrt{E[U^2]E[V^2]}$ si et seulement si $E[(U - cV)^2] = 0$, *i.e.* $\mathbb{P}(\{U = cV\}) = 1$. Si l'on utilise l'identité précédente pour $U = \bar{X}$ et $V = \bar{Y}$, on conclut que $|\text{Cov}(X, Y)| = \sigma_X \sigma_Y$ si et seulement si $\mathbb{P}(\{\bar{X} = c\bar{Y}\}) = 1$, avec $c = \rho_{X,Y} \sigma_X \neq 0$. Cette dernière condition est équivalente à l'existence de coefficients a non nul et b tels que $\mathbb{P}(\{Y = aX + b\}) = 1$. En effet, si $\mathbb{P}(\{\bar{X} = c\bar{Y}\}) = 1$, on prend $a = 1/c$ et $b = E[X]/c - E[Y]$. La réciproque est immédiate.
3. Si X et Y sont indépendantes, alors $E[XY] = E[X]E[Y]$, ce qui implique que $\text{Cov}(X, Y) = 0$, et en conséquence $\rho_{X,Y} = 0$.
4. C'est clair que

$$\begin{aligned} \Phi(a, b) &= E[(aX + b - Y)^2] = E\left[(a\bar{X} - \bar{Y} + b + aE[X] - E[Y])^2\right] \\ &= E[(\bar{Y} - a\bar{X})^2] + E\left[(E[Y] - (aE[X] + b))^2\right] \\ &\quad + 2E\left[(\bar{Y} - a\bar{X})(E[Y] - (aE[X] + b))\right] \\ &= E[(\bar{Y} - a\bar{X})^2] + (E[Y] - (aE[X] + b))^2. \end{aligned}$$

C'est clair que la valeur a_0 minimise $E[(\bar{Y} - a\bar{X})^2]$, d'après l'argument dans l'item (i), tandis que la valeur b_0 annule l'opérande $(E[Y] - (aE[X] + b))^2$.

5. Soit $R_X = \{x_i : i \in \llbracket 1, n \rrbracket\}$ et $R_Y = \{y_i : i \in \llbracket 1, n \rrbracket\}$. Alors,

$$\mathbb{P}(\{X = x\}) = \sum_{\substack{i \in \llbracket 1, n \rrbracket \\ x_i = x}} \mathbb{P}(\{X = x_i, Y = y_i\}) = \frac{\#\{i \in \llbracket 1, n \rrbracket : x_i = x\}}{n}$$

et

$$\mathbb{P}(\{Y = y\}) = \sum_{\substack{i \in \llbracket 1, n \rrbracket \\ y_i = y}} \mathbb{P}(\{X = x_i, Y = y_i\}) = \frac{\#\{i \in \llbracket 1, n \rrbracket : y_i = y\}}{n}.$$

En conséquence,

$$E[X] = \sum_{x \in R_X} x \mathbb{P}(\{X = x\}) = \frac{\sum_i^n x_i}{n} \text{ et } E[Y] = \sum_{iy \in R_Y} y \mathbb{P}(\{Y = y\}) = \frac{\sum_i^n y_i}{n}.$$

En outre,

$$\text{Var}[X] = \sum_{x \in R_X} x^2 \mathbb{P}(\{X = x\}) - E[X]^2 = \frac{\sum_i^n x_i^2}{n} - E[X]^2$$

et

$$\text{Var}[Y] = \sum_{y \in R_Y} y^2 \mathbb{P}(\{Y = y\}) - E[Y]^2 = \frac{\sum_i^n y_i^2}{n} - E[Y]^2.$$

En plus,

$$E[XY] = \sum_{i=1}^n x_i y_i \mathbb{P}(\{X = x_i, Y = y_i\}) = \frac{\sum_i^n x_i y_i}{n}.$$

Cela permet d'exprimer a_0 et b_0 en fonction de points (x_i, y_i) , pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

□

Exercice 179 Une loi normale dans \mathbb{R}^2 Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires à valeurs réelles possédant une densité sur \mathbb{R}^2 donnée par

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\alpha^2}} e^{-\frac{x^2+y^2-2\alpha xy}{2(1-\alpha^2)}}.$$

On suppose que $-1 < \alpha < 1$.

1. Donner les lois de X et de Y . Calculer leur espérance et leur variance.
2. Calculer la covariance de (X, Y) .
3. Soit $Z_1 = X + Y$ et $Z_2 = X - Y$. Donner l'espérance et la variance de Z_1 et Z_2 . Donner leur covariance.
4. Calculer la loi du couple (Z_1, Z_2) . Montrer que Z_1 et Z_2 sont indépendantes et donner leurs lois respectives.

Proof.

1. On remarque d'abord que f est intégrable sur \mathbb{R}^2 . En effet, on voit bien que $y \mapsto f(x, y)$ est intégrable sur \mathbb{R} pour tout $x \in \mathbb{R}$, puisque

$$\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{2\pi\sqrt{1-\alpha^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(y-\alpha x)^2}{2(1-\alpha^2)}} dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},$$

où l'on a utilisé que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2c}} dz = \sqrt{2\pi c}, \quad (29)$$

pour tout $c > 0$ (voir l'exercice 19 de la fiche 3), et la fonction $x \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(x, y) dy = (2\pi)^{-1/2} e^{-x^2/2}$ est absolument intégrable sur \mathbb{R} , d'après l'exercice mentionné. Le théorème de Fubini implique alors que f est intégrable sur \mathbb{R}^2 .

Comme f est intégrable sur \mathbb{R}^2 , le théorème de Fubini nous dit que les densités de X et Y existent et elles sont données par

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)dy \text{ et } f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)dx,$$

respectivement, pour tous $x, y \in \mathbb{R} \setminus Z$, où Z est un ensemble négligeable. Dans ce cas $Z = \emptyset$, puisque, comme on a déjà indiqué,

$$f_X(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{2\pi\sqrt{1-\alpha^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(y-\alpha x)^2}{2(1-\alpha^2)}} dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$, et

$$f_Y(y) = \frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{2\pi\sqrt{1-\alpha^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\alpha y)^2}{2(1-\alpha^2)}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}},$$

pour tout $y \in \mathbb{R}$.

Comme X et Y ont la même fonction de densité, on conclut que $E[X] = E[Y]$ et $\text{Var}[X] = \text{Var}[Y]$. En plus, c'est clair que

$$E[Y] = E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 0,$$

puisque l'intégrande est une fonctions impaires. En outre, dans ce cas $\text{Var}[Y] = \text{Var}[X] = E[X^2]$, qui est donné par

$$E[X^2] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{d}{dc} \left(\sqrt{2\pi c} \right) (1) = 1, \quad (30)$$

où l'on a utilisé l'identité (29) dans la deuxième égalité.

2. Comme $E[X] = E[Y] = 0$, on voit bien que

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X, Y) &= E[XY] = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\alpha^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xye^{-\frac{x^2+y^2-2\alpha xy}{2(1-\alpha^2)}} dx dy \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\alpha^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (uv + \alpha u^2) e^{-\frac{u^2}{2}} e^{-\frac{v^2}{2(1-\alpha^2)}} dudv \\ &= \frac{\alpha}{2\pi\sqrt{1-\alpha^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 e^{-\frac{u^2}{2}} e^{-\frac{v^2}{2(1-\alpha^2)}} dudv, \\ &= \frac{\alpha}{\sqrt{2\pi(1-\alpha^2)}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{v^2}{2(1-\alpha^2)}} dv = \alpha, \end{aligned}$$

où l'on a utilisé le changement de variables $u = x$ et $v = y - \alpha x$ dans la deuxième égalité, (30) dans la quatrième égalité, et (29) dans la dernière.

3. C'est clair que

$$E[Z_1] = E[X + Y] = E[X] + E[Y] = 0 \text{ et } E[Z_2] = E[X - Y] = E[X] - E[Y] = 0.$$

En outre,

$$\text{Var}[Z_i] = E[Z_i^2] - E[Z_i]^2 = E[X^2] - (-1)^i 2E[XY] + E[Y^2] = 2 - (-1)^i 2\alpha,$$

pour $i \in \{1, 2\}$. Finalement,

$$\text{Cov}(Z_1, Z_2) = E[Z_1 Z_2] - E[Z_1]E[Z_2] = E[X^2 - Y^2] = 0.$$

4. Comme $X = (Z_1 + Z_2)/2$ et $Y = (Z_1 - Z_2)/2$, le théorème de changement de variable nous dit que

$$f_{Z_1, Z_2}(z_1, z_2) = \frac{1}{2} f_{X, Y}\left(\frac{z_1 + z_2}{2}, \frac{z_1 - z_2}{2}\right) = \frac{e^{-\frac{z_1^2}{4(1+\alpha)}}}{2\sqrt{\pi(1+\alpha)}} \frac{e^{-\frac{z_2^2}{4(1-\alpha)}}}{2\sqrt{\pi(1-\alpha)}},$$

pour tous $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$. En employant (29), on conclut que

$$f_{Z_1}(z_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{Z_1, Z_2}(z_1, z_2) dz_2 = \frac{e^{-\frac{z_1^2}{4(1+\alpha)}}}{2\sqrt{\pi(1+\alpha)}}$$

et

$$f_{Z_2}(z_2) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{Z_1, Z_2}(z_1, z_2) dz_1 = \frac{e^{-\frac{z_2^2}{4(1-\alpha)}}}{2\sqrt{\pi(1-\alpha)}},$$

pour tous $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$. Comme $f_{Z_1, Z_2}(z_1, z_2) = f_{Z_1}(z_1)f_{Z_2}(z_2)$, pour tous $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$, Z_1 et Z_2 sont indépendantes.

□