

---

# Chapitre 3

## Géométrie et algèbre linéaire

Ce chapitre est centré sur les outils et manipulations basiques dans  $\mathbb{R}^2$  ("le plan", en 2 dimensions) et  $\mathbb{R}^3$  ("l'espace", en 3 dimensions).

D'un point de vue mathématique :  $\mathbb{R}^2 = \{(x, y), x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$  et  $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z), x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}\}$

### 3.1 Vecteurs

#### 3.1.1 Définition

**Définition** Un vecteur  $\vec{u}$  (de  $\mathbb{R}^2$  ou de  $\mathbb{R}^3$ ) est un objet mathématique caractérisé par trois informations :

- une **direction**
- un **sens**
- une longueur, appelée **norme** et notée  $\|\vec{u}\|$ .

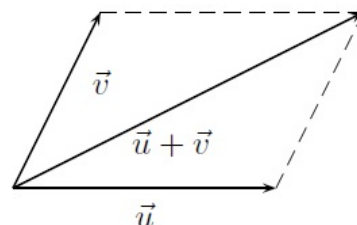
Le **vecteur nul**, noté  $\vec{0}$ , est l'unique vecteur de norme nulle (il n'a ni direction, ni sens).

Ainsi, deux vecteurs non nuls sont égaux s'ils ont même direction, même sens et même norme.

#### 3.1.2 Opérations sur les vecteurs

Il est possible d'additionner deux vecteurs entre eux, et de multiplier un vecteur par un **scalaire** (c'est-à-dire un nombre réel).

**Addition** Soient  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs. On construit leur somme  $\vec{u} + \vec{v}$  en disposant  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  tels que l'extrémité de  $\vec{u}$  coïncide avec l'origine de  $\vec{v}$ . Le vecteur  $\vec{u} + \vec{v}$  est alors obtenu en reliant l'origine du premier vecteur à l'extrémité du second.



**Multipliation par un scalaire** Soient  $k \in \mathbb{R}$  un réel et  $\vec{u}$  un vecteur. Le produit de  $\vec{u}$  par  $k$ , noté  $k\vec{u}$ , est le vecteur de norme  $\|k\vec{u}\| = |k| \cdot \|\vec{u}\|$  tel que :

- Si  $k > 0$ , alors  $k\vec{u}$  a même direction et même sens que  $\vec{u}$

- Si  $k < 0$ , alors  $k\vec{u}$  est de même direction que  $\vec{u}$ , mais de sens opposé
- Si  $k = 0$ , alors  $k\vec{u}$  est simplement le vecteur nul  $\vec{0}$

**Cas particulier  $k = -1$  :** Lorsque l'on multiplie  $\vec{u}$  par  $-1$ , on obtient le vecteur  $-\vec{u}$ , appelé le **vecteur opposé** de  $\vec{u}$ . Il a même direction et même norme, mais son sens est l'opposé du sens de  $\vec{u}$ . Comme pour les nombres réels, on soustrait un vecteur à un autre en lui ajoutant son opposé :  $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$ .

**Propriétés** Soient  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  trois vecteurs et  $k$  et  $l$  deux réels. On a les propriétés suivantes :

1. Commutativité :  $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
2. Associativité :  $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$
3. Distributivité :  $k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$
4. Distributivité :  $(k + l)\vec{u} = k\vec{u} + l\vec{u}$

**Vecteurs colinéaires** Deux vecteurs (non nuls) sont dits **colinéaires** s'ils ont même direction (mais pas forcément même sens ni même norme).

Deux vecteurs (non nuls)  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires si et seulement si il existe un réel  $k$  tel que  $\vec{u} = k\vec{v}$ .

### 3.1.3 Base du plan (vectoriel) $\mathbb{R}^2$ et de l'espace (vectoriel) $\mathbb{R}^3$

**Définition** Soient  $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n$  des vecteurs. On appelle **combinaison linéaire** de ces vecteurs tout vecteur de la forme  $\sum_{k=1}^n \lambda_k \vec{u}_k$  où  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  sont des réels.

**Exemples** Soient  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs.

- $\vec{u} - \frac{3}{2}\vec{v}$  est une combinaison linéaire de  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$
- $-4\vec{u}$  est une combinaison linéaire de  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$
- $\|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$  n'est pas une combinaison linéaire de  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$

**Définition** Une **base** du plan  $\mathbb{R}^2$  (resp. de l'espace  $\mathbb{R}^3$ ) est une famille de 2 vecteurs (resp. 3 vecteurs) telle que tout vecteur  $\vec{u}$  de  $\mathbb{R}^2$  (resp. de  $\mathbb{R}^3$ ) peut s'écrire de manière unique comme une combinaison linéaire des vecteurs de cette famille. Autrement dit :

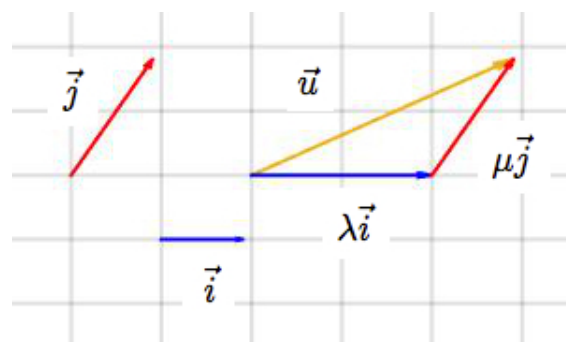
$$(\vec{u}_1, \vec{u}_2) \text{ base de } \mathbb{R}^2 \iff \forall \vec{u} \in \mathbb{R}^2, \exists! (\lambda_1, \lambda_2) \text{ réels tels que } \vec{u} = \lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2$$

$\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont appelées **composantes** ou **coordonnées** de  $\vec{u}$  dans la base  $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$  et on note  $\vec{u} = (\lambda, \mu)$ .

De même :

$$(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3) \text{ base de } \mathbb{R}^3 \iff \forall \vec{u} \in \mathbb{R}^3, \exists! (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \text{ réels tels que } \vec{u} = \lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2 + \lambda_3 \vec{u}_3$$

Géométriquement, comme dans l'exemple ci-contre, définir  $(\vec{i}, \vec{j})$  comme une base de  $\mathbb{R}^2$  signifie que l'on peut écrire tout vecteur  $\vec{u}$  de  $\mathbb{R}^2$  comme la somme de  $\lambda\vec{i}$  et de  $\mu\vec{j}$ . Donc, écrire  $\vec{u} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}$  signifie que, pour aller de l'origine de  $\vec{u}$  à son extrémité, on se déplace d'une longueur  $|\lambda||\vec{i}|$  dans la direction de  $\vec{i}$  (dans le même sens que  $\vec{i}$  si  $\lambda$  est positif et dans le sens inverse si  $\lambda$  est négatif) puis d'une longueur  $|\mu||\vec{j}|$  dans la direction de  $\vec{j}$  (dans le même sens que  $\vec{j}$  si  $\mu$  est positif et dans le sens inverse si  $\mu$  est négatif).



Décomposition du vecteur  $\vec{u}$  dans la base  $(\vec{i}, \vec{j})$

**Exemple** Sur la figure précédente, on remarque que  $\vec{u} = 2\vec{i} + \vec{j}$ . Ainsi, 2 et 1 sont les composantes de  $\vec{u}$  dans la base  $(\vec{i}, \vec{j})$  et on peut noter  $\vec{u} = (2, 1)$  ou  $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Le fait de définir des vecteurs par leurs composantes dans une base permet de les manipuler plus facilement. Les opérations décrites précédemment peuvent se faire à partir des composantes des vecteurs.

**Manipulation des vecteurs via leurs coordonnées** Dans une base donnée :

- Deux vecteurs sont égaux si et seulement si leurs composantes sont égales.
- Additionner deux vecteurs revient à additionner leurs composantes.
- Multiplier un vecteur par un scalaire revient à multiplier chacune de ses composantes par ce scalaire.

**Exemple** Dans  $\mathbb{R}^2$ , soit  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$  une base. Soient  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs de  $\mathbb{R}^2$  ayant respectivement pour composantes  $(x, y)$  et  $(x', y')$  dans la base  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ , et soit  $k$  un réel. Alors :

$$(\vec{u} = \vec{v} \iff x = x' \text{ et } y = y') \qquad k\vec{u} = (kx, ky) \qquad \vec{u} + \vec{v} = (x + x', y + y')$$

**Définition** La base la plus usuelle de  $\mathbb{R}^2$  est souvent notée  $(\vec{i}, \vec{j})$ .  $\vec{i}$  est un vecteur horizontal de longueur 1 orienté vers la droite, et  $\vec{j}$  est un vecteur vertical de longueur 1 orienté vers le haut. Elle s'appelle la **base canonique**.

On a bien sûr de façon similaire une base canonique dans  $\mathbb{R}^3$ , souvent notée  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

**Théorème** Soient  $\vec{u}_1$  et  $\vec{u}_2$  deux vecteurs non nuls du plan  $\mathbb{R}^2$ . Le couple  $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$  forme une base du plan  $\mathbb{R}^2$  si et seulement si  $\vec{u}_1$  et  $\vec{u}_2$  ne sont pas colinéaires.

**Exemples**

- Les vecteurs  $\vec{u}_1 = (1, -1)$  et  $\vec{u}_2 = (3, -3)$  sont colinéaires puisque  $\vec{u}_2 = 3\vec{u}_1$ . Ils ont donc même direction, et toute combinaison linéaire de  $\vec{u}_1$  et  $\vec{u}_2$  aura également cette direction. Ces deux vecteurs ne suffisent donc pas pour décrire l'ensemble des vecteurs du plan : le couple  $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$  ne forme pas une base de  $\mathbb{R}^2$ .

- Les vecteurs  $\vec{v}_1 = (1, -1)$  et  $\vec{v}_2 = (0, 1)$  ne sont pas colinéaires (en effet, il n'existe pas de réel  $k$  tel que  $k\vec{v}_1 = (k, -k)$  soit égal à  $\vec{v}_2 = (0, 1)$ ). Par conséquent,  $(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$  forme une base du plan  $\mathbb{R}^2$ . Tout  $\vec{u} = (x, y)$  de  $\mathbb{R}^2$  peut s'écrire

$$\vec{u} = (x, y) = (x, -x) + (0, x + y) = x(1, -1) + (x + y)(0, 1) = x\vec{v}_1 + (x + y)\vec{v}_2$$

$x$  et  $x + y$  sont les composantes de  $\vec{u}$  dans la base  $(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ .

La propriété correspondante dans  $\mathbb{R}^3$  est la suivante :

**Théorème** Soient  $\vec{u}_1, \vec{u}_2$  et  $\vec{u}_3$  trois vecteurs non nuls de  $\mathbb{R}^3$ . La famille  $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$  forme une base de  $\mathbb{R}^3$  si et seulement si les trois vecteurs ne sont pas coplanaires.

### 3.1.4 Produit scalaire et orthogonalité

On va maintenant définir une opération entre 2 vecteurs, appelée **produit scalaire**, qui est intimement liée aux notions d'orthogonalité et de norme (longueur d'un vecteur).

**Définition** Soient  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs de  $\mathbb{R}^2$  ayant respectivement pour composantes  $(x, y)$  et  $(x', y')$  dans la base canonique  $(\vec{i}, \vec{j})$ . Le **produit scalaire** entre  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ , noté  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  ou  $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ , est le réel défini par

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$$

De même, pour  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs de  $\mathbb{R}^3$  ayant respectivement pour composantes  $(x, y, z)$  et  $(x', y', z')$  dans la base canonique  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , leur produit scalaire est donné par

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$$

Les règles de calcul du produit scalaire sont très semblables à celles de la multiplication des nombres réels.

**Règles d'utilisation du produit scalaire** Soient  $\vec{u}, \vec{v}$  et  $\vec{w}$  trois vecteurs et  $\lambda$  un nombre réel.

- Le produit scalaire est **symétrique** (ou commutatif) :  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
- Le produit scalaire est **bilinéaire** :  $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$   
 $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$   
 $\vec{u} \cdot (\lambda\vec{v}) = (\lambda\vec{u}) \cdot \vec{v} = \lambda(\vec{u} \cdot \vec{v})$

En particulier, le produit scalaire d'un vecteur  $\vec{u}$  avec le vecteur nul  $\vec{0}$  donne toujours le scalaire 0.

**Exemple** On peut exprimer  $(7\vec{u} - \vec{v}) \cdot (4\vec{u} + 3\vec{v})$  en fonction de  $\vec{u} \cdot \vec{u}$ ,  $\vec{v} \cdot \vec{v}$  et  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  :

$$\begin{aligned} (7\vec{u} - \vec{v}) \cdot (4\vec{u} + 3\vec{v}) &= (7\vec{u}) \cdot (4\vec{u} + 3\vec{v}) - \vec{v} \cdot (4\vec{u} + 3\vec{v}) \\ &= (7\vec{u}) \cdot (4\vec{u}) + (7\vec{u}) \cdot (3\vec{v}) - \vec{v} \cdot (4\vec{u}) - \vec{v} \cdot (3\vec{v}) \\ &= 28\vec{u} \cdot \vec{u} + 21\vec{u} \cdot \vec{v} - 4\vec{v} \cdot \vec{u} - 3\vec{v} \cdot \vec{v} \\ &= 28\vec{u} \cdot \vec{u} + 17\vec{u} \cdot \vec{v} - 3\vec{v} \cdot \vec{v} \end{aligned}$$

Plus généralement, on peut décrire géométriquement le produit scalaire de la façon suivante :

**Théorème** Soient  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs. On note  $\theta$  une mesure de l'angle orienté entre  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  (déterminée à un multiple de  $2\pi$  près). Alors

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \theta$$

En particulier, on voit que  $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2 \cos 0 = \|\vec{u}\|^2$ . Donc la norme d'un vecteur est égale à  $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}$ .

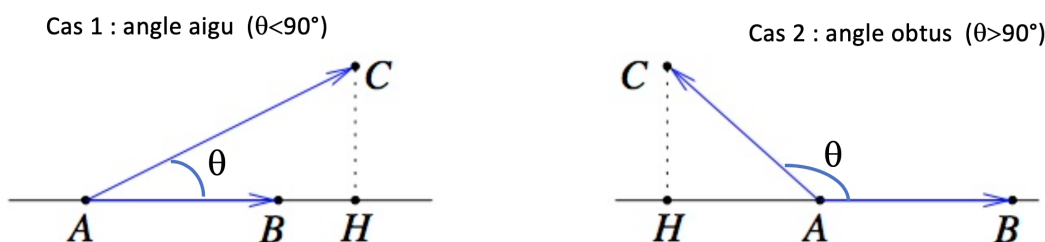
Comme une norme est toujours positive, le signe du produit scalaire est le même que celui de  $\cos \theta$ . Le signe du produit scalaire permet donc de déterminer si l'angle géométrique entre les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  est aigu ( $\cos \theta > 0$ ) ou obtus ( $\cos \theta < 0$ ). On a aussi notamment la propriété suivante :

**Théorème** Deux vecteurs non nuls  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont **orthogonaux** (directions données par deux droites perpendiculaires, ce qui signifie  $\theta = \frac{\pi}{2}$ ) si et seulement si  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ .

Géométriquement, le produit scalaire est très lié à la notion de **projection orthogonale**. Si l'on remplace  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  par  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$  dans la relation  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \theta$ , on obtient la formation suivante :

**Théorème** Soient  $A, B$  et  $C$  trois points distincts du plan, et  $H$  le projeté orthogonal de  $C$  sur la droite  $(AB)$ . Alors  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}$ , et

1. si  $H$  est sur la demi-droite  $[A, B)$  (angle aigu), alors on a  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\| \|\overrightarrow{AH}\|$
2. sinon (angle obtus), on a  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -\|\overrightarrow{AB}\| \|\overrightarrow{AH}\|$



**Définition** Une **base** de  $\mathbb{R}^2$  ou de  $\mathbb{R}^3$  est dite **orthogonale** lorsque tous les vecteurs qui la composent sont deux à deux orthogonaux.

Une base orthogonale de  $\mathbb{R}^2$  ou de  $\mathbb{R}^3$  est dite **orthonormée** lorsqu'en plus tous les vecteurs qui la composent sont de norme 1.

**Exemple** La base canonique  $(\vec{i}, \vec{j})$  de  $\mathbb{R}^2$  est une base orthonormée.

En effet, on a  $\vec{i} = (1, 0)$  et  $\vec{j} = (0, 1)$ . Donc  $\vec{i} \cdot \vec{j} = 1 \times 0 + 0 \times 1 = 0$  :  $(\vec{i}, \vec{j})$  forme une base orthogonale. De plus  $\|\vec{i}\| = \sqrt{\vec{i} \cdot \vec{i}} = \sqrt{1 \times 1 + 0 \times 0} = 1$  et  $\|\vec{j}\| = \sqrt{\vec{j} \cdot \vec{j}} = \sqrt{0 \times 0 + 1 \times 1} = 1$ . Donc  $(\vec{i}, \vec{j})$  est une base orthonormée.

### 3.1.5 Produit vectoriel de 2 vecteurs de $\mathbb{R}^3$

Le **produit vectoriel** est une opération qui, à deux vecteurs de  $\mathbb{R}^3$ , associe un troisième vecteur de  $\mathbb{R}^3$  qui a la propriété d'être orthogonal aux deux premiers.

**Définition** Soient  $\vec{u} = (x, y, z)$  et  $\vec{v} = (x', y', z')$  deux vecteurs de  $\mathbb{R}^3$ . On appelle **produit vectoriel** de  $\vec{u} = (x, y, z)$  et  $\vec{v} = (x', y', z')$ , noté  $\vec{u} \wedge \vec{v}$ , de composantes  $(yz' - zy', zx' - xz', xy' - yx')$ .

**Exemple** Pour  $\vec{u} = (1, 2, 3)$  et  $\vec{v} = (2, 2, 1)$ , on a donc :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = (2 \times 1 - 3 \times 2, 3 \times 2 - 1 \times 1, 1 \times 2 - 2 \times 2) = (-4, 5, -2)$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} yz' - zy' \\ zx' - xz' \\ xy' - yx' \end{pmatrix}$$

**Calcul pratique d'un produit vectoriel** : la première composante de  $\vec{u} \wedge \vec{v}$  est obtenue en ignorant la première ligne des vecteurs et en faisant le produit en croix des 2 autres (calcul en rouge) ; la deuxième composante de  $\vec{u} \wedge \vec{v}$  est obtenue en ignorant la deuxième ligne des vecteurs et en faisant le produit en croix des 2 autres, en changeant le signe (calcul en mauve) ; la troisième composante de  $\vec{u} \wedge \vec{v}$  est obtenue en ignorant la troisième ligne des vecteurs et en faisant le produit en croix des 2 autres (calcul en bleu).

### Règles d'utilisation du produit vectoriel

- Le produit vectoriel est **antisymétrique** :  $\vec{v} \wedge \vec{u} = -\vec{u} \wedge \vec{v}$
- Le produit vectoriel est **bilinéaire** :  $\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}$   
 $(\vec{u} + \vec{v}) \wedge \vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{w} + \vec{v} \wedge \vec{w}$   
 $\vec{u} \wedge (\lambda \vec{v}) = (\lambda \vec{u}) \wedge \vec{v} = \lambda(\vec{u} \wedge \vec{v})$

**Théorème** Soient  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs. On note  $\theta$  une mesure de l'angle orienté entre  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  (déterminée à un multiple de  $2\pi$  près). Alors

$$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| |\sin \theta|$$

**Propriétés** Les définitions et propriétés précédentes impliquent :

- $\vec{u} \wedge \vec{v}$  est orthogonal à  $\vec{u}$  et à  $\vec{v}$  :  $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{u} = (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{v} = 0$
- Si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont deux vecteurs de  $\mathbb{R}^3$  orthogonaux entre eux, alors  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$  est une base orthogonale de  $\mathbb{R}^3$ .
- Deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  de  $\mathbb{R}^3$  sont colinéaires si et seulement si  $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$ .

## 3.2 Déterminants

Le **déterminant** est un opérateur qui, à  $n$  vecteurs de  $\mathbb{R}^n$ , associe un nombre réel. Il a la propriété d'être égal à 0 si et seulement si l'un des vecteurs est une combinaison linéaire des autres (on dit aussi : "la famille de  $n$  vecteurs est linéairement dépendante", ou "la famille de  $n$  vecteurs est liée").

On ne va traiter ici que le déterminant en dimension 2 et en dimension 3.

### 3.2.1 Déterminant de 2 vecteurs de $\mathbb{R}^2$

**Définition** Soient  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs de  $\mathbb{R}^2$  ayant respectivement pour composantes  $(x, y)$  et  $(x', y')$  dans la base canonique  $(\vec{i}, \vec{j})$ . Alors le **déterminant** entre  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ , noté  $\det(\vec{u}, \vec{v})$ , est le réel défini par

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - yx' \quad (\text{"produit en croix" de } \vec{u} \text{ et } \vec{v})$$

#### Règles d'utilisation du déterminant $2 \times 2$

Soient  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  trois vecteurs de  $\mathbb{R}^2$  et  $\lambda$  un nombre réel. La définition du déterminant implique les règles suivantes :

- $\det(\vec{u}, \vec{v}) = -\det(\vec{v}, \vec{u})$  (attention : inverser les 2 vecteurs change le signe du déterminant)
- $\det(\vec{u}, \vec{v} + \vec{w}) = \det(\vec{u}, \vec{v}) + \det(\vec{u}, \vec{w})$
- $\det(\vec{u}, \lambda\vec{v}) = \det(\lambda\vec{u}, \vec{v}) = \lambda \det(\vec{u}, \vec{v})$  (et donc  $\det(\lambda\vec{u}, \mu\vec{v}) = \lambda\mu \det(\vec{u}, \vec{v})$ )

**Théorème** Deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  de  $\mathbb{R}^2$  sont **colinéaires** si et seulement si  $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ .

**Exemple** Soient les vecteurs  $\vec{u} = (m, 4)$  et  $\vec{v} = (1, m)$  où  $m$  est un réel. Déterminer à quelle condition sur  $m$  les vecteurs sont colinéaires.

Le déterminant entre  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  vaut  $\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} m & 1 \\ 4 & m \end{vmatrix} = m^2 - 4$ . L'équation  $\det(\vec{u}, \vec{v}) = m^2 - 4 = 0$  admet deux solutions  $m = 2$  et  $m = -2$ . Ainsi, les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires pour  $m = 2$  ou  $m = -2$ . Dans le premier cas, on a  $\vec{u} = 2\vec{v}$  et dans le deuxième cas  $\vec{u} = -2\vec{v}$ . Dans les 2 cas,  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont donc bien proportionnels.

**Théorème** Soient  $A, B$  et  $C$  trois points du plan  $\mathbb{R}^2$ . L'aire du triangle  $ABC$  vaut  $\frac{1}{2} \left| \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \right|$ .

(Les formules usuelles d'aire et volume sont rappelées en Annexe A.)

### 3.2.2 Déterminant de 3 vecteurs de $\mathbb{R}^3$

**Définition** Soient  $\vec{u}$  de composantes  $(x, y, z)$ ,  $\vec{v}$  de composantes  $(x', y', z')$  et  $\vec{w}$  de composantes  $(x'', y'', z'')$  trois vecteurs de  $\mathbb{R}^3$ . Alors le **déterminant** entre  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$ , noté  $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ , est le réel défini par :

$$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix} - y \begin{vmatrix} x' & x'' \\ z' & z'' \end{vmatrix} + z \begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix}$$

$$= xy'z'' + x'y''z + x''yz' - (xy''z' + x'yz'' + x''y'z)$$

Il y a en fait plusieurs possibilités pour exprimer ce déterminant  $3 \times 3$  en fonction de sous-déterminants  $2 \times 2$ , mais on aboutit bien sûr toujours à la même expression finale ci-dessus.

On remarque qu'il s'agit d'une somme et différence de produits de 3 termes appartenant chacun à une ligne et une colonne différente. Cette expression finale développée peut être retrouvée grâce à la **règle de Sarrus** ci-dessous :

$$xy'z'' + x'y''z + x''yz' - (xy''z' + x'yz'' + x''y'z)$$

**Calcul pratique d'un déterminant  $3 \times 3$  par la règle de Sarrus** *Moyen mnémotechnique : "SE-NE", c'est-à-dire "sud-est moins nord-est" : on ajoute les produits de 3 termes orientés vers le sud-est, et on retranche les produits de 3 termes orientés vers le nord-est.*

Enfin, on peut aussi remarquer que  $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w}$ .

#### Règles d'utilisation du déterminant $3 \times 3$

Soient  $\vec{u}$ ,  $\vec{u}'$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  trois vecteurs de  $\mathbb{R}^3$  et  $\lambda$  un nombre réel. La définition du déterminant implique les règles suivantes, identiques à celles du déterminant  $2 \times 2$  :

- inverser 2 vecteurs change le signe du déterminant. Ainsi par exemple  $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = -\det(\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}) = -\det(\vec{w}, \vec{v}, \vec{u}) = -\det(\vec{u}, \vec{w}, \vec{v})$  (il y a à chaque fois une inversion de vecteurs), et  $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \det(\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}) = \det(\vec{v}, \vec{w}, \vec{u})$  (car ces cas correspondent à 2 inversions successives de vecteurs)
- addition de 2 vecteurs :  $\det(\vec{u} + \vec{u}', \vec{v}, \vec{w}) = \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) + \det(\vec{u}', \vec{v}, \vec{w})$
- multiplication d'un des vecteurs par un nombre réel :  $\det(\lambda\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \lambda \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$

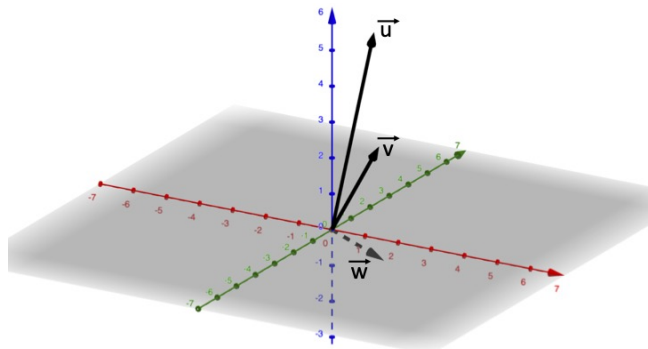
**Théorème** Trois vecteurs  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  de  $\mathbb{R}^3$  sont **coplanaires** (c'est-à-dire linéairement dépendants : on peut exprimer un des vecteurs comme combinaison linéaire des 2 autres) si et seulement si  $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0$ .



**Exemple** Pour  $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$  et  $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ , on a

$$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -3 & -1 & 1 \\ 7 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 3 - 9 + 14 - (-7 + 6 + 9) = 8 - 8 = 0 \quad (\text{par la règle de Sarrus})$$

Le déterminant étant nul, cela indique qu'il existe une combinaison linéaire nulle des 3 vecteurs (c'est-à-dire que l'un des vecteurs peut être exprimé comme combinaison linéaire des deux autres). En effet, on peut remarquer ici que  $\vec{u} = 2\vec{v} - \vec{w}$ , et donc que les 3 vecteurs sont dans un même plan, comme on peut le voir sur le dessin ci-contre.



**Théorème** Soient  $A, B, C$  et  $D$  quatre points de l'espace  $\mathbb{R}^3$ . Le volume du tétraèdre  $ABCD$  vaut  $\frac{1}{6} |\det(\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD})|$ .

(Les formules usuelles d'aire et volume sont rappelées en Annexe A.)

### 3.2.3 Lien avec les systèmes linéaires

On a vu que le déterminant de  $n$  vecteurs de  $\mathbb{R}^n$  est égal à 0 si et seulement si l'un des vecteurs est une combinaison linéaire des autres. Une application de cette propriété concerne les systèmes linéaires.

**Théorème** Un système linéaire de  $n$  équations à  $n$  inconnues a une et une seule solution si et seulement si son déterminant est différent de 0. Dans le cas contraire, il admet soit aucune solution, soit une infinité de solutions.

#### Exemples

- Considérons le système  $\begin{cases} 2x - y = 3 & (1) \\ x + 3y = -2 & (2) \end{cases}$  Son déterminant vaut  $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 - (-1) = 7$ .

Il est différent de 0, donc le système admet une solution unique. En l'occurrence, la combinaison  $3 \times (1) + (2)$  donne  $7x = 7$ , donc  $x = 1$ . D'où  $y = 1$  en remplaçant  $x$  par 1 dans (1) ou (2).

- Considérons maintenant le système  $\begin{cases} x + y - z = 3 & (1) \\ x - 2y = 1 & (2) \\ 2x - y - z = 1 & (3) \end{cases}$

Son déterminant vaut  $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 2 + 0 + 1 - (4 - 1 + 0) = 3 - 3 = 0$ . Il est nul, ce qui

indique que le système n'admet pas une solution unique. En effet, on peut voir que (3) - (1) fournit l'équation  $x - 2y = -2$ , qui est incompatible avec (2). Il n'y a donc pas de solution à ce système.

### 3.3 Géométrie élémentaire en dimensions 2 et 3

On va ici s'intéresser au **plan affine** et à l'**espace affine**, c'est-à-dire  $\mathbb{R}^2$  et  $\mathbb{R}^3$  vus comme des ensembles de points.

#### 3.3.1 Repère cartésien - Coordonnées d'un point

**Définition** Un **repère cartésien** du plan (respectivement : de l'espace) est formé d'un point  $O$  (l'origine du repère) et d'une base de  $\mathbb{R}^2$  (respectivement de  $\mathbb{R}^3$ ).

Dans un repère cartésien  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  du plan, on dit que le point  $M$  défini par  $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$  a pour **coordonnées**  $(x, y)$ , et on note  $M(x, y)$ .

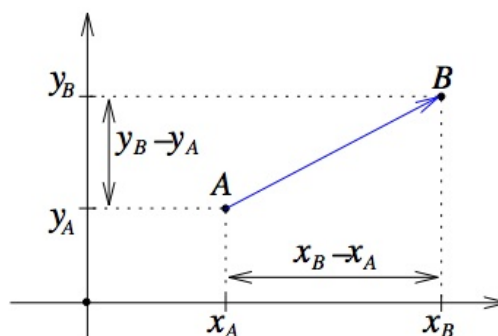
Dans un repère cartésien  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  de l'espace, on dit que le point  $M$  défini par  $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$  a pour **coordonnées**  $(x, y, z)$ , et on note  $M(x, y, z)$ .

Ainsi, nous pouvons déterminer les composantes d'un vecteur à partir des coordonnées des deux points qui définissent ce vecteur :

**Théorème** Soit  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  un repère cartésien du plan. Soient  $A(x_A, y_A)$  et  $B(x_B, y_B)$  deux points du plan. Les composantes du vecteur  $\overrightarrow{AB}$  dans la base  $(\vec{i}, \vec{j})$  sont données par

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A)$$

On a bien sûr la même relation dans  $\mathbb{R}^3$ , avec  $A(x_A, y_A, z_A)$ ,  $B(x_B, y_B, z_B)$ , et  $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$ .



**Exemple** Soit  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  un repère du plan et soient  $A(1, 1)$ ,  $B(4, 2)$ ,  $C(5, 0)$  et  $D(2, -1)$  quatre points du plan. Les composantes de  $\overrightarrow{AB}$  dans la base  $(\vec{i}, \vec{j})$  sont  $\overrightarrow{AB} = (4 - 1, 2 - 1) = (3, 1)$ .

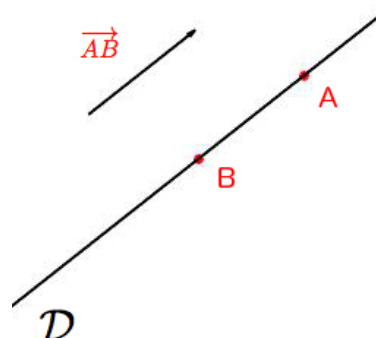
Les composantes de  $\overrightarrow{DC}$  dans la base  $(\vec{i}, \vec{j})$  sont  $\overrightarrow{DC} = (5 - 2, 0 - (-1)) = (3, 1)$ .

On remarque que  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ , ce qui signifie que le quadrilatère  $ABCD$  est un parallélogramme.

#### 3.3.2 Géométrie élémentaire dans le plan affine (dimension 2)

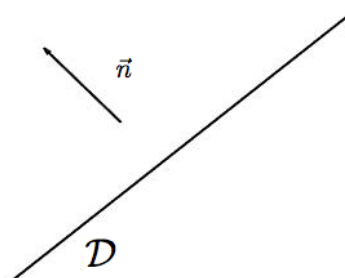
##### 3.3.2.1 Vecteur directeur et vecteur normal à une droite

**Définition** On appelle **vecteur directeur** d'une droite  $\mathcal{D}$  tout vecteur  $\overrightarrow{AB}$  où  $A$  et  $B$  sont deux points distincts de  $\mathcal{D}$ . Ainsi un vecteur directeur détermine la direction d'une droite.



**Remarque** Pour une droite donnée, il existe une infinité de vecteurs directeurs. Tous ces vecteurs directeurs sont colinéaires entre eux.

**Définition** On appelle **vecteur normal** d'une droite  $\mathcal{D}$  tout vecteur directeur  $\vec{n}$  d'une droite perpendiculaire à  $\mathcal{D}$



$\vec{n}$  est donc perpendiculaire à tout vecteur directeur de  $\mathcal{D}$ .

**Remarque** Là encore, pour une droite donnée, il existe une infinité de vecteurs normaux, tous colinéaires entre eux.

#### 3.3.2.2 Equation d'une droite dans le plan

On va expliciter ici les deux façons principales d'exprimer une droite dans le plan affine : par une **équation cartésienne** ou sous une **forme paramétrique**.

**Définition** Soient  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  trois réels tels que  $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$  (i.e. au moins un des deux n'est pas nul). Alors l'ensemble des points du plan  $\mathbb{R}^2$  défini par

$$\mathcal{D} = \{M(x, y); \alpha x + \beta y + \gamma = 0\}$$

est une droite. On dit que l'équation  $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$  est une **équation cartésienne** de cette droite.

Notons que cette caractérisation n'est pas unique puisque, par exemple,  $2\alpha x + 2\beta y + 2\gamma = 0$  est aussi une équation cartésienne de la même droite.

**Remarque** Si  $\beta = 0$  l'équation se ramène à  $x = r$  avec  $r = -\gamma/\alpha$  (puisque  $\alpha \neq 0$ ) : c'est une droite parallèle à l'axe  $Oy$ . Si  $\beta \neq 0$ , l'équation se ramène à  $y = ax + b$  avec  $a = -\alpha/\beta$  et  $b = -\gamma/\beta$ , ce qui est une forme très souvent utilisée pour caractériser une droite. L'équation cartésienne a l'avantage de couvrir les 2 cas, sans caractériser différemment les droites parallèles à l'axe des ordonnées.

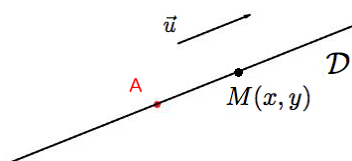
**Théorème** Toute droite  $\mathcal{D}$  du plan admet une équation cartésienne de la forme  $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$  où  $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ , avec  $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ .

$\vec{n} = (\alpha, \beta)$  est un vecteur normal à  $\mathcal{D}$  (et donc  $\vec{u} = (\beta, -\alpha)$  est un vecteur directeur de  $\mathcal{D}$ ).

On peut aussi remarquer que pour définir une droite  $\mathcal{D}$  du plan, il suffit en fait d'un point  $A(x_A, y_A)$  appartenant à  $\mathcal{D}$  et d'un vecteur directeur  $\vec{u} = (x_{\vec{u}}, y_{\vec{u}})$  de  $\mathcal{D}$ . Ces deux informations permettent notamment d'obtenir une **représentation paramétrique** de  $\mathcal{D}$  :

**Théorème** Un point  $M(x, y)$  appartient à la droite  $\mathcal{D}$  si et seulement si il existe un réel  $\lambda$  (appelé *paramètre*) tel que

$$\begin{cases} x = x_A + \lambda x_{\vec{u}} \\ y = y_A + \lambda y_{\vec{u}} \end{cases}$$



**Exemple** Soit  $\mathcal{D}$  la droite passant par le point  $A(2, 1)$  et dont  $\vec{u} = (-3, -1)$  est un vecteur directeur. Un point  $M(x, y)$  appartient à  $\mathcal{D}$  si et seulement si il existe un réel  $\lambda$  tel que

$$\begin{cases} x = 2 - 3\lambda \\ y = 1 - \lambda \end{cases}$$

Autrement dit :  $\mathcal{D} = \{M(2 - 3\lambda, 1 - \lambda), \lambda \in \mathbb{R}\}$ . Cette phrase se lit : “la droite  $\mathcal{D}$  est constituée des points  $M$  de coordonnées  $(2 - 3\lambda, 1 - \lambda)$ , pour toutes les valeurs possibles du réel  $\lambda$ ”.

**Remarque** Pour une droite donnée, le choix d’un point et d’un vecteur directeur n’est évidemment pas unique. Il existe donc une infinité de représentations paramétriques.

**Passage d’une forme à l’autre** On peut évidemment facilement passer d’une équation de droite sous forme cartésienne à une équation de droite sous forme paramétrique, et vice versa. Par exemple :

- Considérons la droite  $\mathcal{D}$  d’équation cartésienne :  $2x - y + 5 = 0$ , et cherchons en une forme paramétrique. En  $x = 0$ , la droite passe par l’ordonnée  $y = 5$ . Le point  $A(0, 5)$  appartient donc à  $\mathcal{D}$ . Le vecteur  $\vec{u} = (-1, -2)$  est un vecteur directeur de  $\mathcal{D}$ . Ainsi un point  $M(x, y)$  appartient à  $\mathcal{D}$  si et seulement si il existe un réel  $\lambda$  tel que

$$\begin{cases} x = -\lambda \\ y = 5 - 2\lambda \end{cases}$$

- Considérons la droite  $\mathcal{D}$  définie par la forme paramétrique  $\{M(4 + \lambda, -1 + 2\lambda); \lambda \in \mathbb{R}\}$ , et cherchons une équation cartésienne de cette droite :  $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ .  $\mathcal{D}$  admet pour vecteur directeur  $\vec{u} = (1, 2)$  (coefficients devant le paramètre  $\lambda$ ) et donc pour vecteur normal  $\vec{n} = (-2, 1)$ . Ainsi nous pouvons choisir  $\alpha = -2$  et  $\beta = 1$ . De plus le point  $A(4, -1)$  (obtenu en choisissant  $\lambda = 0$ ) appartient à  $\mathcal{D}$  donc  $\gamma = -\alpha x_A - \beta y_A = -(-2) \times 4 - 1 \times (-1) = 9$ . Ainsi un point  $M(x, y)$  appartient à  $\mathcal{D}$  si et seulement si il vérifie l’équation  $-2x + y + 9 = 0$ .

### 3.3.2.3 Intersection de 2 droites dans le plan

Deux droites  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  peuvent être **sécantes** (elles possèdent alors un seul point commun). Dans le cas contraire, elles sont **parallèles** : elles sont alors **confondues** (et possèdent une infinité de points communs) ou **strictement parallèles** (et n’ont aucun point commun).

**Théorème** Deux droites sont parallèles si et seulement si l’une des caractérisations suivantes est vérifiée :

- leurs deux vecteurs directeurs sont colinéaires
- leurs deux vecteurs normaux sont colinéaires
- le vecteur directeur de l’une est orthogonal au vecteur normal de l’autre

Pour déterminer le point d'intersection de deux droites sécantes, on est amené à résoudre un système linéaire de deux équations à deux inconnues. Les 3 cas de figures possibles sont exposés dans les exemples ci-dessous.

#### Exemples

- Intersection de  $\mathcal{D} = \{(x, y), x + y = 0\}$  et  $\mathcal{D}' = \{(x, y) = (2 - \lambda, 1 - \lambda), \lambda \in \mathbb{R}\}$ .

On a  $x + y = 0$ . Or  $x = 2 - \lambda$  et  $y = 1 - \lambda$  donc  $(2 - \lambda) + (1 - \lambda) = 0$ , qui donne immédiatement  $\lambda = \frac{3}{2}$ . Ainsi,  $x = 2 - \lambda = \frac{1}{2}$  et  $y = 1 - \lambda = -\frac{1}{2}$ . L'unique point d'intersection a pour coordonnées  $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ .

- Intersection de  $\mathcal{D} : x + 2y + 2 = 0$  et  $\mathcal{D}' : 4x - y - 1 = 0$ .

Il faut donc résoudre le système 
$$\begin{cases} x + 2y = -2 & (L_1) \\ 4x - y = 1 & (L_2) \end{cases}$$

Pour éliminer  $x$  dans la deuxième équation, on effectue la transformation  $(L_2) \leftarrow (L_2) - 4(L_1)$  :

$$\begin{cases} x + 2y = -2 & (L_1) \\ -9y = 9 & (L_2) \leftarrow (L_2) - 4(L_1) \end{cases}$$

On trouve alors  $y = -1$ . Ce résultat est inséré dans  $(L_1)$  qui devient  $x - 2 = -2$ , ce qui donne  $x = 0$ . Par conséquent, l'unique point d'intersection entre  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  a pour coordonnées  $(0, -1)$ .

- Intersection de  $\mathcal{D} = \{(x, y) = (1 - 2\lambda, 2 + \lambda), \lambda \in \mathbb{R}\}$  et  $\mathcal{D}' = \{(x, y) = (\mu, 1 + 3\mu), \mu \in \mathbb{R}\}$

Un point d'intersection  $M(x, y)$  de  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  doit vérifier les deux caractérisations, ce qui donne  $x = 1 - 2\lambda = \mu$  et  $y = 2 + \lambda = 1 + 3\mu$ . On a donc le système linéaire :

$$\begin{cases} -2\lambda - \mu = -1 & (L_1) \\ \lambda - 3\mu = -1 & (L_2) \end{cases}$$

En faisant  $(L_1) + 2(L_2)$ , on élimine  $\lambda$  et on obtient  $-7\mu = -3$ , soit  $\mu = 3/7$ . D'où  $\lambda = -1 + 3\mu = 2/7$ . On en déduit alors  $x = 1 - 2\lambda = \mu = 3/7$  et  $y = 2 + \lambda = 1 + 3\mu = 16/7$ . L'unique point d'intersection entre  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  a pour coordonnées  $(3/7, 16/7)$ .

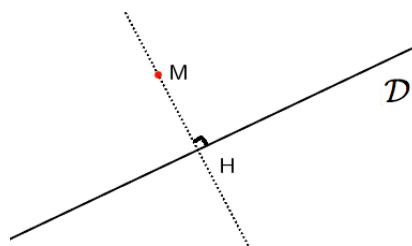
#### 3.3.2.4 Distance entre deux points dans le plan

**Théorème** Soient  $A$  et  $B$  deux points du plan  $\mathbb{R}^2$ . La distance entre ces deux points est égale à la longueur du vecteur  $\overrightarrow{AB}$  :

$$d(A, B) = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

### 3.3.2.5 Projection d'un point sur une droite - distance d'un point à une droite

**Définition** Soient  $\mathcal{D}$  une droite du plan et  $M$  un point du plan. On appelle **projeté orthogonal** (ou **projection orthogonale**) de  $M$  sur la droite  $\mathcal{D}$  le point d'intersection  $H$  entre la droite  $\mathcal{D}$  et la droite perpendiculaire à  $\mathcal{D}$  passant par  $M$ .



**Définition** La distance d'un point  $M$  à une droite  $\mathcal{D}$  est la distance la plus courte entre  $M$  et un point appartenant à  $\mathcal{D}$ .

**Théorème** Le théorème de Pythagore permet d'affirmer que la distance du point  $M$  à la droite  $\mathcal{D}$  correspond à la distance entre  $M$  et son projeté orthogonal  $H$  sur  $\mathcal{D}$ .

Si l'équation de  $\mathcal{D}$  est  $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$  où  $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$  et  $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ , et si  $M$  a pour coordonnées  $(x_0, y_0)$ , alors la distance de  $M$  à la droite  $\mathcal{D}$  vaut :

$$d(M, \mathcal{D}) = \|\overrightarrow{MH}\| = \frac{|\alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma|}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$$

### 3.3.3 Géométrie élémentaire dans l'espace affine (dimension 3)

On va maintenant énoncer des définitions et des résultats similaires à ceux du §3.3.2, mais dans l'espace  $\mathbb{R}^3$  et non plus dans le plan  $\mathbb{R}^2$ .

#### 3.3.3.1 Equation d'un plan dans l'espace $\mathbb{R}^3$

Un plan dans l'espace affine  $\mathbb{R}^3$  peut être défini sous une **forme paramétrique** ou sous une **forme cartésienne**.

**Définition** Soient  $\alpha, \beta, \gamma$  et  $\delta$  quatre réels tels que  $(\alpha, \beta, \gamma) \neq (0, 0, 0)$  (i.e. au moins un des trois n'est pas nul). Alors l'ensemble des points de l'espace  $\mathbb{R}^3$  défini par

$$\mathcal{P} = \{M(x, y, z); \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0\}$$

est un plan. On dit que l'équation  $\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$  est une **équation cartésienne** de ce plan. Notons que cette caractérisation n'est pas unique puisque, par exemple,  $2\alpha x + 2\beta y + 2\gamma z + 2\delta = 0$  est aussi une équation cartésienne du même plan.

**Théorème** Tout plan  $\mathcal{P}$  de l'espace  $\mathbb{R}^3$  admet une équation cartésienne de la forme  $\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$  où  $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4$ , avec  $(\alpha, \beta, \gamma) \neq (0, 0, 0)$ .

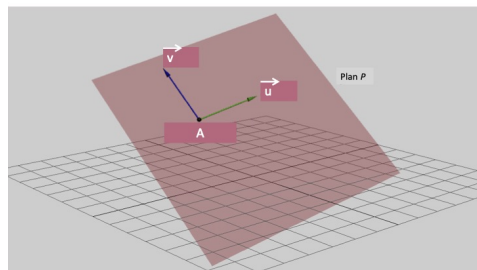
De plus,  $\vec{n} = (\alpha, \beta, \gamma)$  est un vecteur normal à  $\mathcal{P}$ .

### 3.3. GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE EN DIMENSIONS 2 ET 3

On peut aussi remarquer que pour définir un plan  $\mathcal{P}$  de l'espace  $\mathbb{R}^3$ , il suffit en fait d'un point  $A(x_A, y_A, z_A)$  appartenant à  $\mathcal{P}$  et de deux vecteurs non colinéaires  $\vec{u} = (x_{\vec{u}}, y_{\vec{u}}, z_{\vec{u}})$  et  $\vec{v} = (x_{\vec{v}}, y_{\vec{v}}, z_{\vec{v}})$  de  $\mathcal{P}$ . Ces deux informations permettent notamment d'obtenir une **représentation paramétrique** de  $\mathcal{P}$  :

**Théorème** Un point  $M(x, y, z)$  appartient au plan  $\mathcal{P}$  si et seulement si il existe deux réels  $\lambda$  et  $\mu$  tels que

$$\begin{cases} x &= x_A + \lambda x_{\vec{u}} + \mu x_{\vec{v}} \\ y &= y_A + \lambda y_{\vec{u}} + \mu y_{\vec{v}} \\ z &= z_A + \lambda z_{\vec{u}} + \mu z_{\vec{v}} \end{cases}$$



On peut bien sûr passer d'une forme (cartésienne ou paramétrique) à l'autre, comme on a su le faire pour les droites dans  $\mathbb{R}^2$ .

#### 3.3.3.2 Intersection de deux plans dans l'espace $\mathbb{R}^3$

**Théorème** Deux plans  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{P}'$  sont **parallèles** si et seulement si leurs vecteurs normaux  $\vec{n}$  et  $\vec{n}'$  sont colinéaires, c'est-à-dire  $\vec{n} \wedge \vec{n}' = \vec{0}$ . Ils sont alors **confondus** (et possèdent une infinité de points communs) ou **strictement parallèles** (et n'ont aucun point commun).

Lorsque  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{P}'$  ne sont pas parallèles, ils possèdent une infinité de points communs : leur intersection est une droite de  $\mathbb{R}^3$  ayant pour vecteur directeur  $\vec{n} \wedge \vec{n}'$  (puisque ce vecteur est orthogonal à  $\vec{n}$ , donc appartient à  $\mathcal{P}$ , et est également orthogonal à  $\vec{n}'$ , donc appartient aussi à  $\mathcal{P}'$ ).

#### 3.3.3.3 Intersection d'une droite et d'un plan dans l'espace $\mathbb{R}^3$

**Théorème** Un plan  $\mathcal{P}$  et une droite  $\mathcal{D}$  sont **parallèles** si et seulement si le vecteur directeur  $\vec{d}$  de  $\mathcal{D}$  est perpendiculaire au vecteur normal  $\vec{n}$  de  $\mathcal{P}$ , c'est-à-dire  $\vec{d} \cdot \vec{n} = 0$ . Ils sont alors **strictement parallèles** (et n'ont aucun point commun), ou bien  $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}$  (et il y a une infinité de points communs : tous les points de  $\mathcal{D}$ ).

Lorsque le plan  $\mathcal{P}$  et la droite  $\mathcal{D}$  ne sont pas parallèles, ils possèdent un unique point d'intersection. On peut déterminer ses coordonnées en remarquant qu'elles vérifient simultanément les équations définissant  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{D}$  (système de 3 équations à 3 inconnues).

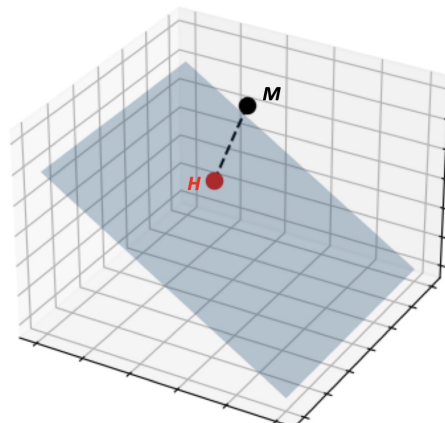
#### 3.3.3.4 Distance entre deux points dans l'espace $\mathbb{R}^3$

**Théorème** Soient  $A$  et  $B$  deux points de l'espace  $\mathbb{R}^3$ . La distance entre ces deux points est égale à la longueur du vecteur  $\overrightarrow{AB}$  :

$$d(A, B) = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

### 3.3.3.5 Projection d'un point sur un plan - distance d'un point à un plan

**Définition** Soient  $\mathcal{P}$  un plan de  $\mathbb{R}^3$  et  $M$  un point de  $\mathbb{R}^3$ . On appelle **projeté orthogonal** (ou **projection orthogonale**) de  $M$  sur  $\mathcal{P}$  le point d'intersection  $H$  entre le plan  $\mathcal{P}$  et la droite perpendiculaire à  $\mathcal{P}$  passant par  $M$ .



**Définition** La distance d'un point  $M$  à un plan  $\mathcal{P}$  est la distance la plus courte entre  $M$  et un point appartenant à  $\mathcal{P}$ .

**Théorème** La distance du point  $M$  au plan  $\mathcal{P}$  correspond à la distance entre  $M$  et son projeté orthogonal  $H$  sur  $\mathcal{P}$ .

Si l'équation de  $\mathcal{P}$  est  $\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$  où  $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4$  et  $(\alpha, \beta, \gamma) \neq (0, 0, 0)$ , et si  $M$  a pour coordonnées  $(x_0, y_0, z_0)$ , alors la distance de  $M$  au plan  $\mathcal{P}$  vaut :

$$d(M, \mathcal{P}) = \|\overrightarrow{MH}\| = \frac{|\alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma z_0 + \delta|}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}}$$