

MAT305

Exercice

On définit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ par $f(x, y) = (1 - x^2 - y^2) \exp(-(x^2 + y^2))$

1. Faire une étude de la fonction $g(x) = f(x, 0) = (1 - x^2) \exp(-x^2)$.
2. Calculer la valeur et le gradient de f en $(0, 0)$.
3. Déterminer les ensemble $f^{-1}(\{1\})$ et $f^{-1}(\{0\})$.
4. Déterminer les ensembles de niveaux de f et donner une interprétation géométrique.
5. Soit $R > 0$. Montrer que $f \circ \gamma$ est constante où $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (R \cos(7t), R \sin(7t))$ et préciser la valeur du constant.
6. Calculer le gradient de f et $\dot{\gamma}$ le vecteur vitesse de γ .
7. Calculer le produit scalaire $(\text{grad } f) \cdot \dot{\gamma}$ et représenter le résultat graphiquement.

Exercice

On définit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ par $f(x, y) = x^2 - 2xy + y^2 + 1$

1. Déterminer l'ensemble $f^{-1}(\{1\})$.
2. Montrer que $f(x, y) \geq 1$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$
3. Déterminer les ensembles de niveaux de f et donner une interprétation géométrique.
4. Soit $R > 0$. Montrer que $f \circ \gamma$ est constante où $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (t, t + R)$ et préciser la valeur du constant.
5. Calculer le gradient de f et $\dot{\gamma}$ le vecteur vitesse de γ .

6. Calculer le produit scalaire $(\text{grad } f) \cdot \dot{\gamma}$ et représenter le résultat graphiquement.

Exercice

On définit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ par $f(x, y) = 5x^2 - 6xy + 5y^2$.

1. Montrer que $f(x, y) = X^2 + 4Y^2$ où $X = (x + y)$ et $Y = (x - y)$

2. Montrer que $f \circ \gamma$ est constante où

$$\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto \left(\cos(t) + \frac{1}{2} \sin(t), \cos(t) - \frac{1}{2} \sin(t) \right)$$

et préciser la valeur du constant.

3. Déterminer les ensembles de niveaux de f et donner une interprétation géométrique.

4. Calculer le gradient de f et $\dot{\gamma}$ le vecteur vitesse de γ .

5. Calculer le produit scalaire $(\text{grad } f) \cdot \dot{\gamma}$ et représenter le résultat graphiquement.