Chapitre 4

Fonctions d'une variable réelle

4.1 Définitions générales - Vocabulaire

4.1.1 Fonctions, applications, images et antécédents

Définition Une **fonction** est la description d'une relation entre les éléments de deux ensembles A et B. En général, la notation mathématique utilisée pour définir une fonction est du type :

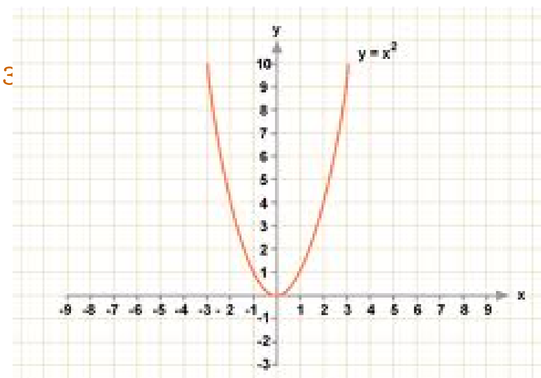
$$f: \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & B \\ x & \longrightarrow & y = f(x) \end{array}$$

- A est appelé l'**ensemble de départ** et B l'**ensemble d'arrivée**.
- y est l'**image** de x par f.
- x est un **antécédent** de y par f.

Dans la définition ci-dessus, on dit bien "l'image" et non pas "une image", car une fonction associe au plus une image à tout élément de l'ensemble de départ.
On a écrit aussi "un antécédent" et non pas "l'antécédent", car une valeur y dans B peut avoir 0, 1 ou plusieurs antécédents.

Exemple `https://www.youtube.com/watch?v=Ys3`
On considère la fonction $f(x) = x^2$.

L'image de $x = 2$ par f est $y = 4$.
$y = 0$ a un seul antécédent $x = 0$.
$y = 3$ a deux antécédents $x_1 = -\sqrt{3}$ et $x_2 = \sqrt{3}$.
$y = -2$ n'a pas d'antécédent.



Définition Une **application** est une fonction pour laquelle tout élément de l'ensemble de départ a une et une seule image.

Bien qu'on ait souvent tendance à employer indifféremment les deux termes "fonction" et "application", il y a donc en toute rigueur une différence. Pour une fonction, il peut exister des éléments de l'ensemble de départ qui n'ont pas d'image.

Exemple *La fonction*

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longrightarrow & y = 1/x \end{array}$$

n'est pas une application, car l'élément $x = 0$ n'a pas d'image par f.
Par contre, la fonction

$$\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longrightarrow & y = 1/x \end{array}$$

est une application car chaque élément de l'ensemble de départ a une et une seule image.
Ceci nous amène donc naturellement à la notion de domaine de définition.

> **Définition** Le **domaine de définition** d'une fonction f est l'ensemble des valeurs x pour lesquelles $f(x)$ est définie. Autrement dit, il s'agit des valeurs de x pour lesquelles on peut calculer $f(x)$. Il est souvent noté $\mathcal{D}_f$.

Pour la plupart des fonctions, déterminer le domaine de définition revient à trouver les valeurs de x pour lesquelles le calcul de $f(x)$ mènerait à l'une des impossibilités suivantes :

- diviser par 0
- prendre la racine carrée d'un nombre strictement négatif (ou plus généralement, prendre la puissance non entière d'un nombre négatif, car on la calcule par la formule $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$)
- prendre le logarithme d'un nombre négatif ou nul

Exemple `https://www.youtube.com/watch?v=Kg6A-Kct4vo` *Soit* $f(x) = \dfrac{\ln(2x+1)}{\sqrt{1-x^2}}$.
Ne pas diviser par 0 implique que $1 - x^2 \neq 0$, c'est-à-dire $x \neq 1$ et $x \neq -1$.
Ne pas prendre la racine carrée d'un nombre strictement négatif implique que $1 - x^2 \geq 0$, c'est à dire $x \in [-1; 1]$.
Ne pas prendre le logarithme d'un nombre négatif ou nul implique que $2x + 1 > 0$, c'est-à-dire $x > -\frac{1}{2}$.
Les valeurs de x vérifiant ces 3 conditions forment le domaine de définition $\mathcal{D}_f =]-\frac{1}{2}; 1[$.

4.1.2 Quelques propriétés courantes des fonctions

> **Définition** On dit qu'une fonction est :
>
> - **affine** si elle est de la forme $f(x) = ax + b$ où a et b sont des constantes fixées. Sa représentation graphique est une droite, croissante si $a > 0$, horizontale si $a = 0$ et décroissante si $a < 0$. a est la **pente** ou encore le **coefficient directeur**.
> - **linéaire** si elle est de la forme $f(x) = ax$ où a est une constante. Sa représentation graphique est une droite passant par l'origine $(0, 0)$. C'est un cas particulier de fonction affine.
> - **polynomiale** si elle est de la forme $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x_1 + a_0$ où $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$ sont des coefficients fixés. n est **l'ordre** du polynôme. Si $n = 2$ (polynôme d'ordre 2), sa représentation graphique est une parabole (comme la fonction $y = x^2$ précédente).
> - **trigonométrique** si c'est une combinaison linéaire des fonctions trigonométriques élémentaires $(\sin x, \cos x, \tan x)$.

Définition Une fonction est :

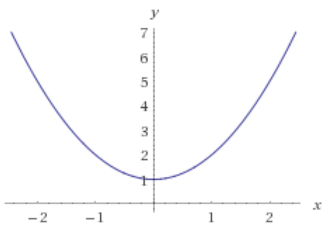
- **paire** si et seulement si elle vérifie $f(-x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathcal{D}_f$. Sa courbe représentative est alors symétrique par rapport à la droite verticale $x = 0$ (c'est à dire l'axe des ordonnées).
- **impaire** si et seulement si elle vérifie $f(-x) = -f(x)$ pour tout $x \in \mathcal{D}_f$. Sa courbe représentative est alors symétrique par rapport au point $(0, 0)$. En particulier, on a $f(0) = 0$.
- **périodique de période T** (on dit aussi **T-périodique**) si et seulement si elle vérifie $f(x+T) = f(x)$ pour toute valeur x. Sa courbe représentative est alors un motif de largeur T qui se reproduit identiquement à lui-même.

Exemples

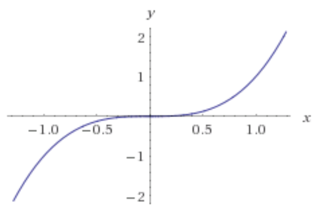
- $f(x) = x^2 + 1$ *est une fonction paire, car* $f(-x) = (-x)^2 + 1 = x^2 + 1 = f(x)$.
- $g(x) = x^3$ *est une fonction impaire, car* $g(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -g(x)$.
- $h(x) = \tan(x)$ *est une fonction π-périodique, car*

$$h(x+\pi) = \frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \frac{-\sin x}{-\cos x} = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x = h(x)$$

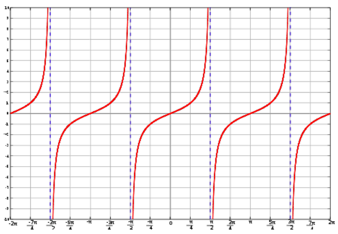
De plus, h est impaire car $h(-x) = \dfrac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \dfrac{-\sin x}{\cos x} = -\tan(x) = -h(x)$



$f(x)$



$g(x)$



$h(x)$

Définition Soit f une application de E vers F. f est :

- **croissante** sur E si et seulement si $\forall x_1 \in E, \forall x_2 \in E$, $(\ x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \leq f(x_2)\ )$
- **strictement croissante** sur E si et seulement si $\forall x_1 \in E, \forall x_2 \in E$, $(\ x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2)\ )$
- **décroissante** sur E si et seulement si $\forall x_1 \in E, \forall x_2 \in E$, $(\ x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \geq f(x_2)\ )$
- **strictement décroissante** sur E si et seulement si $\forall x_1 \in E, \forall x_2 \in E$, $(\ x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) > f(x_2)\ )$
- **(strictement) monotone** sur E si et seulement si elle est (strictement) croissante ou (strictement) décroissante sur E.

Définition Soit f une application de E vers F. f est :

- **majorée** sur E si et seulement si il existe un réel M tel que $f(x) \leq M$ pour tout $x \in E$. M est un **majorant** de f sur E.
- **minorée** sur E si et seulement si il existe un réel m tel que $m \leq f(x)$ pour tout $x \in E$. m est un **minorant** de f sur E.
- **bornée** sur E si et seulement si elle est majorée et minorée sur E.

4.1.3 Composition de fonctions

Définition Soit f une fonction de l'ensemble A vers l'ensemble B, et g une fonction de l'ensemble B vers l'ensemble C : $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$

On appelle **fonction composée**, notée $g \circ f$, la fonction définie par $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

Cette fonction va donc de l'ensemble A vers l'ensemble C : $A \xrightarrow{g \circ f} C$

Exemple *Soient les 2 fonctions $f(x) = x^2$ et $g(x) = \sqrt{x}$. Leurs domaines de définition sont $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ et $\mathcal{D}_g = \mathbb{R}^+ = [0, +\infty[$. Alors :*

- *$f \circ g$ est définie sur $\mathbb{R}^+$ et on a $(f \circ g)(x) = (g(x))^2 = (\sqrt{x})^2 = x$*
- *$g \circ f$ est définie sur $\mathbb{R}$ (car f est définie sur $\mathbb{R}$ et $f(x)$ est toujours dans $\mathbb{R}^+$) et on a $(g \circ f)(x) = \sqrt{f(x)} = \sqrt{x^2} = |x|$*

Une erreur fréquente consiste à confondre $f \circ g$, $g \circ f$ et $f \times g$.

Exemple *Soient les 2 fonctions $f(x) = x^2$ et $g(x) = 2x + 1$, définies sur $\mathbb{R}$. On a :*

- $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (g(x))^2 = (2x + 1)^2 = 4x^2 + 4x + 1$
- $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 2f(x) + 1 = 2x^2 + 1$
- $(f \times g)(x) = f(x)g(x) = x^2(2x + 1) = 2x^3 + x^2$

Dérivée d'une fonction composée Soit f une fonction définie et dérivable en un point a, et g une fonction définie et dérivable au point $f(a)$. Alors $g \circ f$ est définie et dérivable en a, et

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a))\, f'(a)$$

Exemple *La fonction $\sqrt{x^2+1}$ est la composée des fonctions $f(x) = x^2 + 1$ et $g(x) = \sqrt{x}$. Sa dérivée vaut donc*

$$\left(\sqrt{x^2+1}\right)' = g'(f(x))\, f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{f(x)}}\, f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

4.2 Plan d'étude d'une fonction

On rappelle ici rapidement la démarche à suivre pour étudier une fonction, et on l'illustre par un exemple simple. Les diverses notions mises en jeu seront détaillées dans la suite du chapitre.

4.2.1 Les différentes étapes

Les étapes de l'étude d'une fonction f sont les suivantes :

1. Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}_f$.
   Les points à regarder : ne pas diviser par 0, ne pas prendre la racine carrée d'un nombre strictement négatif, ne pas prendre le logarithme d'un nombre négatif ou nul...
2. Etudier la parité ou la périodicité de f, et réduire éventuellement le domaine d'étude.
   Si f est paire ou impaire, il suffit de l'étudier sur la partie positive de $\mathcal{D}_f$, et on complètera par symétrie. Si f est périodique de période T, il suffit de l'étudier sur un intervalle de longueur T, et on complètera par périodicité.

3. Calculer les limites aux bornes du domaine d'étude.
   Il peut éventuellement y avoir des "formes indéterminées" (cf §4.4.2).
4. Calculer la dérivée f' et déterminer son signe.
   Attention au domaine de définition de f' (le "domaine de dérivabilité"), qui peut éventuellement être plus petit que $\mathcal{D}_f$ s'il existe des points où f n'est pas dérivable.
5. Dresser le tableau de variations de f et vérifier qu'il est cohérent.
   Ce tableau résume les informations sur le domaine de définition, les limites, le signe de la dérivée et les sens de variation de f. Son contenu doit être cohérent.
6. S'il y a une ou deux branches infinies, c'est-à-dire si $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$, étudier l'existence éventuelle d'asymptotes obliques, et le cas échéant la position de $\mathcal{C}_f$, la courbe représentative de f, par rapport à l'asymptote (cf §4.7).
7. Tracer $\mathcal{C}_f$.

Attention à la cohérence entre les différents éléments de l'étude de fonction. Par exemple, si la fonction est croissante sur $[0;+\infty[$ et que l'on trouve une limite $-\infty$ en $x \to +\infty$, il y a un problème quelque part. De même, si on trouve un domaine de définition égal à $[-1;1]$, on ne doit pas chercher la limite en $+\infty$. Bref : être vigilant à la cohérence entre limites / variations / dessins / domaine de définition.

4.2.2 Représentation graphique

On place sur la figure les éléments suivants :

- asymptotes éventuelles (verticales, horizontales, obliques) ;
- tangentes horizontales (c.a.d. là où la dérivée s'annule) ;
- tangentes verticales (c.a.d. là où la fonction est définie et continue mais où la dérivée n'est pas définie — voir la remarque plus bas) ;
- quelques points particuliers (par exemple pour $x = -1, 0, 1$) avec leurs tangentes locales ;
- on relie avec soin les points en tenant compte des éléments précédents.

En bref, le dessin doit être un résumé de l'étude de fonction et doit contenir toute l'information étudiée.

Remarque au sujet des tangentes verticales Les tangentes verticales se rencontrent lorsque le domaine de définition de f' n'est pas le même que celui de f, autrement dit s'il existe un ou plusieurs points en lesquels f est continue mais pas dérivable. Par exemple, si on considère la fonction $f(x) = \sqrt{x(x-1)}$, son domaine de définition est $]-\infty;0]\cup[1;+\infty[$. Sa dérivée est $f'(x) = (2x-1)/\sqrt{x(x-1)}$ et f' est définie sur $]-\infty;0[\cup]1;+\infty[$. En 0 et en 1, f est définie (et continue) mais pas dérivable, et en ces points la fonction admet des tangentes verticales.

Tangentes et asymptotes sont deux notions différentes. Voir la remarque à ce sujet au §4.7.4.

4.2.3 Exemple

Etude de la fonction $f(x) = \dfrac{x^3}{(x-1)^2}$ https://www.youtube.com/watch?v=M5Rd_AqzIvY

1. *Domaine de définition*
   $f(x)$ est défini dès lors que l'on ne divise pas par 0, c'est-à-dire pour $x - 1 \neq 0$. Donc :

$$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}\setminus\{1\} =]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$$

2. *Parité, imparité, périodicité*
   $f(-x) = \dfrac{-x^3}{(-x-1)^2} = -\dfrac{x^3}{(x+1)^2}$ qui est différent de $\pm f(x)$. Donc f n'est ni paire ni impaire. De plus, elle n'est pas périodique. Le domaine d'étude ne peut donc pas être réduit.

3. *Limites aux bornes du domaine d'étude*

   - $f(x) = \dfrac{x^3}{(x-1)^2} = \dfrac{x^3}{x^2\left(1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)} = \dfrac{x}{1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}$. Donc : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
   - Quand $x \to 1$, $(x-1)^2 \to 0^+$ et $x^3 \to 1$. Donc $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = +\infty$

4. *Calcul de la dérivée et détermination de son signe*
   On calcule $f'(x) = \dfrac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}$. Son signe est déterminé en dressant un tableau de signes :

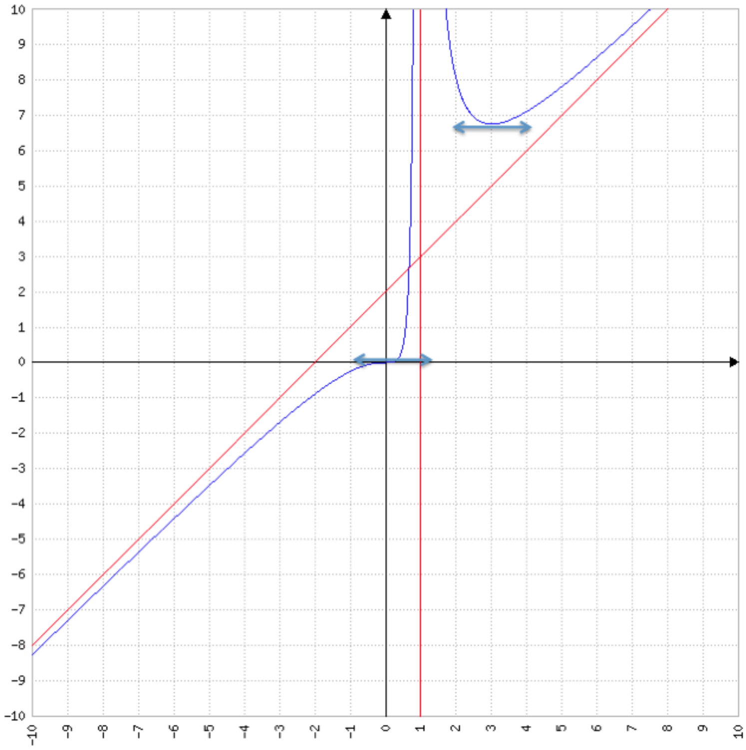
x	$-\infty$		0		1		3		$+\infty$
x^2		$+$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-3$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x-1)^3$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

5. *Tableau de variations*
   Les informations précédentes peuvent être résumées dans le tableau ci-dessous. On y ajoute les valeurs particulières $f(0) = 0$ et $f(3) = 27/4$.

x	$-\infty$		0		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
					$+\infty \Vert +\infty$				$+\infty$
$f(x)$			0	$\nearrow$	$\Vert$	$\searrow$		$\nearrow$	
	$-\infty$	$\nearrow$			$\Vert$		$27/4$		

6. *Recherche des asymptotes*
   La droite $x = 1$ est asymptote verticale.
   La fonction f comporte des branches infinies. Pour rechercher les éventuelles asymptotes obliques, on peut transformer l'expression de f (on verra aussi une méthode générale de détermination des asymptotes au §4.7. On a : $(x-1)^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$. Donc $x^3 = (x-1)^3 + 3x^2 - 3x + 1 = (x-1)^3 + 3(x^2 - 2x + 1) + 3x - 2 = (x-1)^3 + 3(x-1)^2 + 3x - 2$. En divisant par $x-1)^2$, on en déduit que $f(x) = x + 2 + \dfrac{3x-2}{(x-1)^2}$. Puisque $\dfrac{3x-2}{(x-1)^2}$ tend vers 0 quand x tend vers $\pm\infty$, on peut en conclure que la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x + 2$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ en $\pm\infty$.
   Pour connaître la position de $\mathcal{D}$ par rapport à $\mathcal{C}_f$, on détermine le signe de la différence entre leurs deux équations : $f(x) - (x+2) = \dfrac{3x-2}{(x-1)^2}$ qui est positif en $+\infty$ et négatif en $-\infty$. Donc $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{D}$ en $+\infty$, et en-dessous de $\mathcal{D}$ en $-\infty$.

7. *Représentation graphique*
   On place sur la figure les deux asymptotes (une verticale et une oblique), les tangentes horizontales en $x = 0$ et $x = 3$, et on trace la courbe de façon cohérente avec le tableau de variations.



4.3 Fonctions usuelles

On désigne par **fonctions usuelles** les fonctions élémentaires utilisées très fréquemment dans tous les domaines scientifiques : polynômes, fonctions puissance (racine carrée, fonction $1/x$...), logarithme et exponentielle, fonctions trigonométriques (sinus, cosinus, tangente). Les différentes propriétés de ces fonctions doivent être parfaitement connues, et leur manipulation doit être maîtrisée.

Des rappels sont disponibles en Annexe B pour les polynômes, Annexe C pour les fonctions puissance, Annexe D pour les fonctions trigonométriques, et Annexe E pour logarithme et exponentielle.

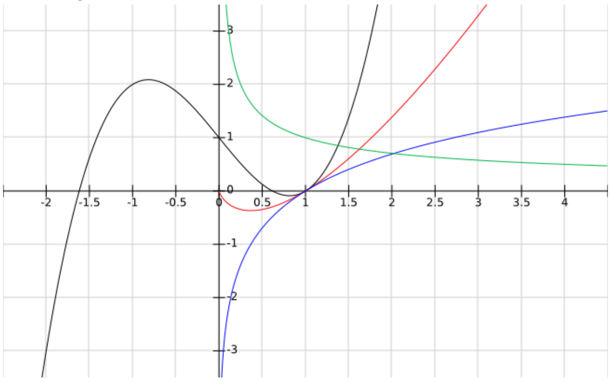
4.4 Calcul de limites

4.4.1 Limites en un point $x_0 \in \mathbb{R}$ et limites en $\pm\infty$

Définition Soit f une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}$, et soit x_0 un point de son domaine de définition, ou une extrémité de son domaine de définition.

- La limite de f en x_0 (ou encore : la limite de $f(x)$ quand x tend vers x_0) est égale à un réel ℓ si et seulement si $f(x)$ se rapproche aussi près de ℓ que l'on veut si l'on prend x suffisamment proche de x_0. On note alors : $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$.
- La limite de f en x_0 (ou encore : la limite de $f(x)$ quand x tend vers x_0) est égale à $+\infty$ si et seulement si $f(x)$ devient aussi grand que l'on veut si l'on prend x suffisamment proche de x_0. On note alors : $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$.
- On a de la même façon $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$ si et seulement si $f(x)$ devient aussi négatif que l'on veut si l'on prend x suffisamment proche de x_0.
- Si aucun des cas précédents ne s'applique, f n'admet pas de limite en x_0.

Exemples



- *Courbe noire :* $f(x) = x^3 - 2x + 1$
  $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ *et* $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 2^3 - 2 \times 2 + 1 = 6.$
- *Courbe rouge :* $f(x) = x \ln x$
  $\mathcal{D}_f =]0; +\infty[$ *et on verra que* $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0.$
- *Courbe verte :* $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$
  $\mathcal{D}_f =]0; +\infty[$ *et* $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty.$
- *Courbe bleue :* $f(x) = \ln x$
  $\mathcal{D}_f =]0; +\infty[$ *et* $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty.$

La notion de limite est également importante au voisinage de l'infini (i.e. quand x tend vers $\pm\infty$).

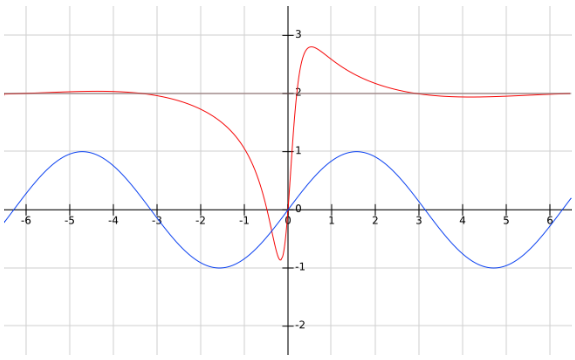
Définition

- f admet une **limite ℓ en $+\infty$** si et seulement si $f(x)$ se rapproche aussi près de ℓ que l'on veut si l'on prend x suffisamment grand. On note alors : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$.

  La courbe de f admet donc une asymptote horizontale d'équation $y = \ell$ en $+\infty$.
- On a bien sûr la même chose en $-\infty$.
- On peut également avoir une limite valant $\pm\infty$ quand x tend vers $\pm\infty$.
- Enfin, si aucun des cas précédents ne s'applique, on dit que f n'admet pas de limite en $\pm\infty$.

Exemple

- *La fonction* $f(x) = \dfrac{2x^2 + \sin x}{x^2 + 0.1}$ *(courbe rouge) vérifie* $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 2.$
- *La fonction* $\sin x$ *(courbe bleue) n'a pas de limite en* $\pm\infty$.



4.4.2 Opérations sur les limites et formes indéterminées

Théorème Les opérations algébriques usuelles s'appliquent aux limites finies, ce qui signifie que, si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ et $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \ell' \in \mathbb{R}$ (avec a fini ou infini), alors

$$\lim_{x \to a} \alpha f(x) = \alpha\, \ell \ \ (\forall \alpha \in \mathbb{R}) \qquad \lim_{x \to a} (f+g)(x) = \ell + \ell' \qquad \lim_{x \to a} (f \times g)(x) = \ell \ell' \qquad \lim_{x \to a} \frac{f}{g}(x) = \frac{\ell}{\ell'} \ (\text{si } \ell' \neq 0)$$

Pour des limites infinies (ou pour $\ell' = 0$ dans le cas de la division), les mêmes règles s'appliquent mais on rencontre parfois des **cas indéterminés**. Ce sont les cas du type (en notant symboliquement) :

$$+\infty - \infty, \quad 0 \times \infty, \quad \frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad \infty^0, \quad 1^\infty$$

Exemples

- $\lim\limits_{x\to 0} x \ln x$ *est un cas indéterminé du type* $0 \times \infty$ *(cette limite est en fait égale à 0)*
- $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x - x^2$ *est un cas indéterminé du type* $+\infty - \infty$ *(cette limite est en fait égale à* $+\infty$*)*
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 2x}{x^3}$ *est un cas indéterminé du type* $\dfrac{0}{0}$ *(cette limite est en fait égale à* $+\infty$*)*
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4x^2-1}{x^2+x+1}$ *est un cas indéterminé du type* $\dfrac{\infty}{\infty}$ *(cette limite est en fait égale à 4)*
- $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{1/x}$ *est un cas indéterminé du type* ∞^0 *(cette limite est en fait égale à 1)*
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ *est un cas indéterminé du type* 1^∞ *(cette limite est en fait égale à* e*)*

4.4.3 Quelques outils pour traiter les cas indéterminés

Déterminer si la limite existe, et si oui quelle est sa valeur, dans les cas indéterminés demande toujours un travail spécifique. Bien qu'il n'y ait pas de "recette miracle" pour cela, les méthodes listées ci-dessous permettent de résoudre certains cas fréquents.

Limite d'une fraction rationnelle (c'est-à-dire la division de deux polynômes $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$) :

- si on est dans le cas $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{\infty}{\infty}$, factoriser P et Q par leurs termes de plus haut degré
- si on est dans le cas $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{0}{0}$, factoriser P et Q par $(x - x_0)$

Exemple $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3-2x^2+1}{x^4-x^2+2}$ *est de la forme indéterminée* $\dfrac{\infty}{\infty}$*. Si l'on factorise par les termes de plus haut degré :*

$$\frac{x^3-2x^2+1}{x^4-x^2+2} = \frac{x^3\,(1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^3})}{x^4\,(1-\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^4})} = \frac{1}{x}\,\frac{1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^3}}{1-\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^4}} \longrightarrow 0 \times \frac{1}{1} = 0 \textit{ quand } x \to \infty$$

Multiplication par la quantité conjuguée En cas d'indétermination du type "$+\infty - \infty$" impliquant des racines carrées, la multiplication par la **quantité conjuguée** permet souvent de lever l'incertitude.
Rappel : la quantité conjuguée de $A+B$ *est* $A-B$*, la quantité conjuguée de* $A-B$ *est* $A+B$*. Leur produit vaut donc* $A^2 - B^2$*.*

Exemple https://www.youtube.com/watch?v=AJDmhjQkDAE

$\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2-x+1}$ *est de la forme indéterminée "*$+\infty - \infty$*". Si l'on multiplie et que* *l'on divise par la quantité conjuguée, on obtient :*

$$\begin{aligned}
\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1} &= \frac{\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}\right)\left(\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}\right)}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}} \\
&= \frac{(x^2+x+1)-(x^2-x+1)}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}} \\
&= \frac{2x}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}} \\
&= \frac{x}{\sqrt{x^2}}\,\frac{2}{\sqrt{1+1/x+1/x^2}+\sqrt{1-1/x+1/x^2}} \\
&= \frac{x}{|x|}\,\frac{2}{\sqrt{1+1/x+1/x^2}+\sqrt{1-1/x+1/x^2}}
\end{aligned}$$

D'où $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}=1$ *et* $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}=-1.$

Comparaison des fonctions logarithmes, puissances et exponentielles La **règle des croissances comparées** indique que :

$$\forall\alpha>0,\,\forall\beta>0,\qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\beta x}}{x^\alpha}=+\infty \qquad \lim_{x\to+\infty}x^\alpha\,e^{-\beta x}=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^\beta}{x^\alpha}=0 \qquad \lim_{x\to0^+}x^\alpha\,(\ln x)^\beta=0$$

Exprimé en langage courant : <u>en cas d'indétermination</u> dans le calcul d'une limite, l'exponentielle impose sa limite à la fonction puissance, et la fonction puissance impose sa limite au logarithme.

Exemple

- $\lim\limits_{x\to0}x\ln x=$ *?* *Cette limite est de la forme indéterminée* $0\times\infty$.
  C'est la fonction puissance (c.a.d. ici x) qui va dominer et donner la limite. Donc $\lim\limits_{x\to0}x\ln x=0.$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}x^3\,e^{-x}=$ *?* *Cette limite est de la forme indéterminée* $\infty\times0$.
  C'est la fonction exponentielle (c.a.d. ici e^{-x}) qui va dominer et donner la limite. Donc $\lim\limits_{x\to+\infty}x^3\,e^{-x}=0.$

Deux erreurs sont fréquemment commises dans l'utilisation de cette règle, en se référant de façon trop approximative à son énoncé "en langage courant".

- Ne pas oublier que cette règle ne s'applique qu'en cas d'indétermination. Il faut donc bien vérifier qu'on est dans un tel cas.
  Considérons par exemple $\lim\limits_{x\to0}x^2e^x$. Cette limite se calcule directement, car il n'y a pas d'indétermination : $x^2\to0$ et $e^x\to e^0=1$. Donc le produit tend vers $0\times1=0$.
  Si l'on avait appliqué (alors que ce n'était pas justifié) la règle de comparaison des fonctions puissance et exponentielle, on aurait conclu à tort que c'est l'exponentielle qui donne la valeur de la limite, et donc que la limite vaut 1.

- Bien se ramener aux cas indiqués dans le théorème. Ainsi on peut conclure à tort sur la valeur d'une limite en disant que "l'exponentielle l'emporte sur la puissance", alors que le contenu de l'exponentielle est en fait une fonction compliquée. Autrement dit, par exemple en $+\infty$, on n'a pas forcément $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{u(x)}}{x^\beta} = +\infty$, même si $u(x) \to +\infty$ quand $x \to +\infty$.

  On montre ainsi que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\exp\left(3\ln(2+\sqrt{x})-1\right)}{x^2} = 0$, contrairement à ce qu'une utilisation trop "expéditive" de la règle des croissances comparées aurait conclu.

Taux d'accroissement et dérivées On rappelle la définition de la dérivée (on y reviendra au §4.6) d'une fonction f en un point a : $f'(a) = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$. On peut parfois utiliser cette définition pour trouver la valeur de la limite dans des cas indéterminés du type $\dfrac{0}{0}$, en remarquant que l'expression dont on cherche la limite est justement un **taux d'accroissement**, c'est-à-dire de la forme $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

Exemples

- $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x\sqrt{x}-1}{x-1}$? https://www.youtube.com/watch?v=gqKRwnh9W0c

  Cette limite est de la forme $\dfrac{0}{0}$. *Si l'on pose* $f(x) = x\sqrt{x} = x^{3/2}$, *on reconnait le taux d'accroissement* $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$. *Donc la limite recherchée vaut* $f'(1)$. *Ici* $f'(x) = \dfrac{3}{2}x^{1/2}$. *Donc finalement :* $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x\sqrt{x}-1}{x-1} = \dfrac{3}{2}$

- $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{x^2+x}{1-\cos x}$? *Cette limite est de la forme* $\dfrac{0}{0}$.

  On a : $\dfrac{x^2+x}{1-\cos x} = (x+1)\dfrac{x}{1-\cos x} = -(x+1)\dfrac{x-0}{\cos x - \cos 0}$ *(car* $\cos 0 = 1$*). Si l'on pose* $g(x) = \cos x$, *on a donc* $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\cos x - \cos 0}{x-0} = g'(0) = -\sin 0 = 0$. *D'où* $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{x^2+x}{1-\cos x} = \infty$

On peut noter trois résultats importants qu'on démontre par cette méthode, à connaître par coeur :

$$\lim_{x\to0} \frac{\sin x}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to0} \frac{e^x-1}{x} = 1$$

Règle de L'Hôpital Cette règle permet de résoudre des formes indéterminées du type $\dfrac{0}{0}$ ou $\dfrac{\infty}{\infty}$. Son énoncé est le suivant :

> **Théorème** Soient f et g deux fonctions définies et dérivables au voisinage de a (mais pas forcément en a), a pouvant être réel ou infini. Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ ou $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = \pm\infty$, et si $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ existe, alors $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Exemple $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{2x} - \cos x}{3 \sin x} = ?$

En posant $f(x) = e^{2x} - \cos x$ *et* $g(x) = 3 \sin x$*, on peut vérifier que les hypothèses du théorème sont bien satisfaites. On a* $f'(x) = 2e^{2x} + \sin x$ *et* $g'(x) = 3 \cos x$*. Donc la limite recherchée vaut* $f'(0)/g'(0) = 2/3$*.*

Beaucoup d'étudiants aiment utiliser cette règle quasiment systématiquement. Ne pas oublier que les autres méthodes vues précédemment sont parfois bien plus simples.
Par ailleurs, dans le cas $\dfrac{0}{0}$ et lorsque a n'est pas infini, cette règle n'est en fait qu'une utilisation directe de la technique des taux d'accroissement. En effet :

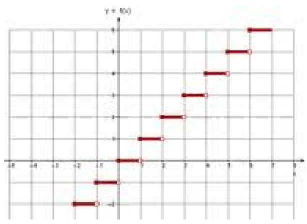
$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - 0}{g(x) - 0} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \, \frac{x - a}{g(x) - g(a)} \longrightarrow \frac{f'(a)}{g'(a)} \text{ quand } x \longrightarrow a$$

4.5 Continuité

La continuité est une notion assez intuitive. Elle correspond au fait de "tracer sans lever le crayon" la courbe représentative d'une fonction. Sa définition formelle est la suivante :

Définition Une fonction f est **continue en un point** a de son domaine de définition si et seulement si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Exemples



• *La plupart des fonctions usuelles sont continues en tout point de leur domaine de définition : polynômes, fonctions trigonométriques, logarithmes, exponentielles. . .*

• *La* **partie entière** *d'un réel* x*, notée* $E(x)$*, est l'entier relatif immédiatement inférieur ou égal à* x *(cf dessin ci-contre). Cette fonction est discontinue en tout point* $a \in \mathbb{Z}$*.*

Définition Une fonction f est **continue sur un intervalle ouvert** $]a, b[$ si et seulement si elle est continue en tout point de cet intervalle.

Théorème Soient deux fonctions f et g, et a un réel.

- Si f est continue en a, alors λf est continue en a, pour tout réel λ.
- Si f et g sont continues en a, alors $f + g$ et $f \times g$ sont continues en a.
- Si f est continue en a et g est continue en $f(a)$, alors $g \circ f$ est continue en a.

Avec ce théorème et la continuité des fonction usuelles, on démontre la continuité de la plupart des fonctions que l'on a à étudier.

Exemple *On considère la fonction* $f(x) = \ln\left(\dfrac{2|x|}{1 + x^2}\right)$*, qui est définie sur* $\mathbb{R}^*$*.* $x \longrightarrow |x|$ *est continue sur* $\mathbb{R}^*$*, et* $x \longrightarrow \dfrac{1}{1 + x^2}$ *est continue sur* $\mathbb{R}$ *(composée de* $g_1(x) = 1/x$ *et de* $g_2(x) = 1 + x^2$ *qui ne s'annule pas). Donc (par produit)* $x \longrightarrow \dfrac{2|x|}{1 + x^2}$ *est continue sur* $\mathbb{R}^*$*, et à valeurs dans* $\mathbb{R}_+^*$*. Donc, par composition avec le logarithme qui est continu sur* $\mathbb{R}_+^*$*,* $x \longrightarrow \ln\left(\dfrac{2|x|}{1 + x^2}\right)$ *est continue sur* $\mathbb{R}^*$ *.*

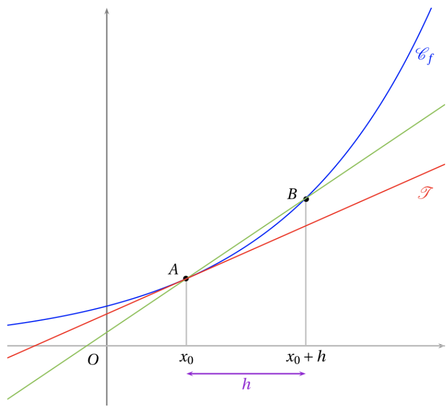
4.6 Dérivabilité et tangentes à une courbe

4.6.1 Définitions

Définition Soit f continue sur un intervalle I. Soit $x_0 \in I$. f est **dérivable en x_0** si et seulement si $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe. Cette limite est notée $f'(x_0)$ et est appelée **dérivée de f en x_0**.

Remarque Les définition suivantes de la dérivée sont équivalentes à la définition précédente :

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h} \end{aligned}$$



Interprétation graphique La dérivée $f'(x_0)$ est la pente de la tangente à la courbe représentative de f en x_0. Dans le dessin ci-contre, la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point A est en rouge, et est la limite quand h tend vers 0 de la droite verte correspondant à la pente $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.

Définition f est **dérivable sur un intervalle I** si et seulement si elle est dérivable en tout point de I.

Une erreur classique est d'affirmer que la continuité implique la dérivabilité. Toute fonction continue mais non dérivable illustre que ceci est faux, comme par exemple la fonction valeur absolue en $x = 0$.

Dérivées successives En dérivant plusieurs fois de suite une même fonction, on définit ses dérivées successives : dérivée seconde, dérivée troisième. . .

$$f'' = (f')' \qquad f^{(3)} = (f'')' \qquad \dots \qquad f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$$

4.6.2 Tangente à la courbe représentative d'une fonction

Soit une fonction f continue et dérivable dans un voisinage d'un point x_0. On peut facilement déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point x_0. En effet, il s'agit d'une droite, donc son équation est de la forme $y = ax + b$. De plus, on a vu que sa pente est égale à la dérivée en x_0 : $a = f'(x_0)$. Enfin, le point $(x_0, f(x_0))$ appartient à cette droite. Donc $f(x_0) = f'(x_0)\, x_0 + b$, d'où la valeur de b.

Finalement, **l'équation de la tangente au point x_0** est : $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

4.6.3 Opérations sur les dérivées

Théorème

- Si f et g sont dérivables en a, alors $f + g$ aussi et $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$.
- Si f et g sont dérivables en a, alors $f \times g$ aussi et $(f \times g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.

- La dérivée de la fonction inverse est $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$
- Si f est dérivable en a et et g est dérivable en $f(a)$, alors $g \circ f$ est dérivable en a et $(g \circ f)'(a) = g'(f(a))\, f'(a)$.
- Si f et g sont dérivables en a et si $g(a) \neq 0$, alors $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(a) = \dfrac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}$.
- Si f est bijective d'un intervalle I vers un intervalle J, si f est dérivable en $a \in I$ et si $f'(a) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en $b = f(a)$ et $(f^{-1})'(b) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(b))}$.

Démonstration *Tous ces résultats peuvent être démontrés très simplement en revenant à la définition de la dérivée comme limite d'un taux d'accroissement.* □

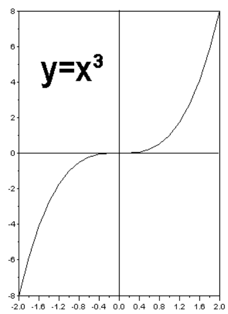
Un formulaire sur les dérivées (opérations et fonctions usuelles) est disponible en Annexe G.

4.6.4 Dérivée, sens de variation, extrema

Théorème Soit une fonction f continue sur un intervalle I, et dérivable au point $x_0 \in I$.
- si $f'(x_0) > 0$, alors f est croissante dans un voisinage de x_0
- si $f'(x_0) < 0$, alors f est décroissante dans un voisinage de x_0

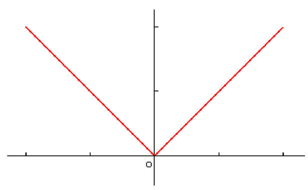
Ce résultat bien connu explique l'importance qu'il y a à déterminer le signe de la dérivée lors de l'étude d'une fonction, afin de décrire ses variations.

Théorème Soit f une fonction définie dans un voisinage d'un point a. Si f présente un extremum local en a et si f est dérivable en a, alors $f'(a) = 0$.



Si f est dérivable en a, $f'(a) = 0$ est une condition nécessaire pour avoir un extremum, mais ce n'est pas une condition suffisante.

Exemple *La fonction* $f(x) = x^3$ *a pour dérivée* $f'(x) = 3x^2$. *On a donc* $f'(0) = 0$, *mais pourtant* 0 *n'est pas un extremum.*



Une fonction peut admettre un extremum en un point a sans être dérivable en ce point.

Exemple *La fonction* $f(x) = |x|$ *est minimale en* $x = 0$. *Pourtant, la dérivée de* f *n'existe pas en 0.*

4.7 Etude d'une branche infinie : recherche d'une asymptote oblique

4.7.1 Définitions

Une asymptote à une fonction f est une droite dont la courbe représentative de f, notée $\mathcal{C}_f$, se rapproche infiniment près, en général sans jamais l'atteindre. On distingue deux types d'asymptotes : les asymptotes verticales et les asymptotes obliques (qui incluent le cas des asymptotes horizontales).

Définition Soit f une fonction et x_0 un point n'appartenant pas au domaine de définition de f. On dit que la droite d'équation $x = x_0$ est **asymptote verticale** à $\mathcal{C}_f$ si et seulement si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$.

Définition Soit f une fonction. On dit que la droite d'équation $y = a\,x + b$ est **asymptote oblique** à $\mathcal{C}_f$ en $\pm\infty$ si et seulement si $\lim\limits_{x \to \pm\infty} [f(x) - (a\,x + b)] = 0$.

Une asymptote horizontale est un cas particulier des asymptotes obliques, correspondant à $a = 0$.

Définition Soit f une fonction. On dit que f, ou que $\mathcal{C}_f$, présente une **branche infinie** si et seulement si $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$.

4.7.2 Recherche d'une asymptote oblique

Le cas des asymptotes horizontales est trivial : celles-ci sont identifiées dès lors qu'on calcule $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x)$. En effet, la droite $y = b$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}_f$ en $\pm\infty$ si et seulement si $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = b$.

On va donc considérer maintenant le cas où la fonction f présente une branche infinie. On cherche alors à savoir si cette branche infinie admet une asymptote oblique, et si oui, on cherche à déterminer la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à cette asymptote (au-dessus, en-dessous, ou oscillant autour de l'asymptote).

La démarche est la suivante (on prend ci-dessous l'exemple d'une recherche d'asymptote en $+\infty$, c'est évidemment similaire en $-\infty$) :

- Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. Si cette limite est infinie, il n'y a pas d'asymptote.
- Si cette limite est finie, on la note a. Il y a alors peut-être une asymptote, et on calcule $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - a\,x)$.
  - Si cette limite est infinie, il n'y a pas d'asymptote, mais on dit qu'il y a tout de même une **direction asymptotique de pente a**.
  - Si cette limite est finie, on la note b. Il y a alors une asymptote d'équation $y = a\,x + b$.
- Enfin, s'il y a une asymptote oblique (d'équation $y = ax+b$), on étudie le signe de $f(x)-(ax+b)$ pour déterminer la position de la courbe $\mathcal{C}_f$ par rapport à cette asymptote.
  - Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - (ax + b) = 0^+$ (c'est-à-dire si $f(x)-(ax+b) \geq 0$ pour tout x suffisamment grand), alors la courbe est au-dessus de l'asymptote.

— Si $\lim_{x\to+\infty} f(x) - (ax+b) = 0^-$ (c'est-à-dire si $f(x)-(ax+b) \leq 0$ pour tout x suffisamment grand), alors la courbe est en-dessous de l'asymptote.
— Si le signe de $f(x)-(ax+b)$ ne se stabilise jamais quand x tend vers l'infini, alors la courbe oscille autour de l'asymptote.

Explication Supposons que f admette une asymptote oblique d'équation $y = a\,x + b$ en $+\infty$ (le raisonnement est identique en $-\infty$). Ceci signifie que $\lim_{x\to+\infty} [f(x) - (a\,x+b)] = 0$. En divisant par x, on en déduit que : $\lim_{x\to+\infty} \left[\frac{f(x)}{x} - a - \frac{b}{x}\right] = 0$. Or $\lim_{x\to+\infty} \frac{b}{x} = 0$. Donc $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = a$. Cette égalité permet de trouver a. Et une fois a connu, on peut reformuler la définition de l'asymptote pour trouver b : $\lim_{x\to+\infty} (f(x) - a\,x) = b$.

4.7.3 Exemples

Un premier exemple de calcul d'une asymptote oblique est donné au §4.2.3. Voici un exemple supplémentaire.

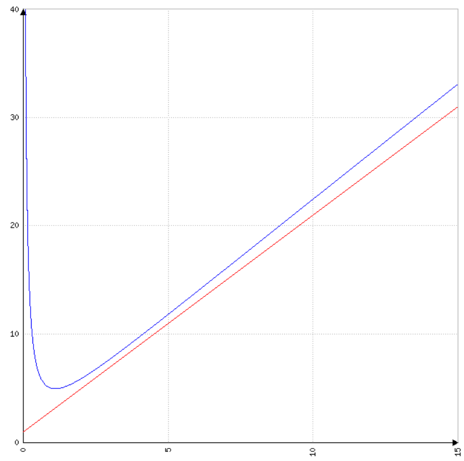
https://www.youtube.com/watch?v=ZHbyLGOUotQ

Considérons la fonction $f(x) = 2x + \sqrt{x} - 1 + 3/x$, définie sur $]0, +\infty[$.

On a $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$. Donc f admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$.

On a $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 2$ et $\lim_{x\to+\infty} (f(x) - 2x) = +\infty$. La fonction f admet donc une direction asymptotique de pente 2, mais pas d'asymptote en $+\infty$.

Ceci est illustré sur le dessin ci-contre, où l'on voit que la courbe s'écarte petit à petit d'une droite qui est pourtant de pente 2.



4.7.4 Asymptotes et tangentes

Tangentes et asymptotes sont deux notions différentes.

— Une asymptote est une droite dont la courbe $\mathcal{C}_f$ se rapproche infiniment près quand x tend vers une extrémité ouverte de son domaine de définition ($\pm\infty$ pour une asymptote oblique, une valeur $a \in \mathbb{R}$ borne du domaine de définition de f pour une asymptote verticale).
— Une tangente est une droite dont la valeur et la pente coïncident avec la valeur et la pente de $\mathcal{C}_f$ pour une abscisse donnée x_0.
Son équation est : $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

On parle donc de *tangente à la courbe en* x_0 mais pas d'*asymptote à la courbe en* x_0 (sauf asymptote verticale).

On parle donc d'*asymptote à la courbe en* $\pm\infty$ mais pas de *tangente à la courbe en* $\pm\infty$.

4.8 Compléments : fonctions réciproques

Définition Soit f une application de E vers F. On dit que f est **bijective** si et seulement si tout élément de F a un et un seul antécédent dans E.

$$\text{Autrement dit :} \quad \forall y \in F, \exists!\, x \in E \,/\, y = f(x)$$

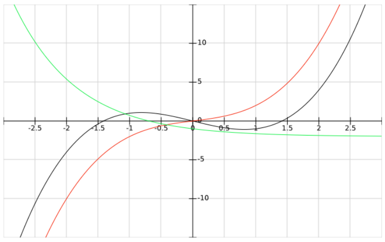
Interprétation Déterminer si une fonction est bijective revient, pour y_0 fixé, à compter les antécédents de y_0 par f, c'est-à-dire à chercher combien il y a de solutions x au problème $f(x) = y_0$. Graphiquement, cela revient à compter combien de fois la droite horizontale $y = y_0$ coupe la courbe représentative de f.

Exemple *Dans la figure ci-contre, on constate que :*

— *la fonction $e^{-x} - 2$ (courbe verte) est bijective de $\mathbb{R}$ vers $]-2, +\infty[$: tout $y \in]-2, +\infty[$ a un et un seul antécédent. Autrement dit : la courbe verte coupe une et une seule fois n'importe quelle droite horizontale au-dessus de $y = -2$. Par contre elle n'est pas bijective par exemple de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, car les valeurs de y inférieures ou égales à -2 n'ont pas d'antécédent (c.a.d. ne sont pas atteintes).*

— *la fonction $x^3 - 2x$ (courbe noire) n'est pas bijective de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$: on voit que les valeurs de y proches de 0 ont 3 antécédents.*

— *la fonction $x^3 + x$ (courbe rouge) est bijective de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. tout $y \in \mathbb{R}$ a un et un seul antécédent. Autrement dit : la courbe rouge coupe une et une seule fois n'importe quelle droite horizontale*



Exemples

- *Une fonction paire ne peut pas être bijective, car si x est un antécédent de y, alors $-x$ est également un antécédent de y.*
- *Une fonction périodique de période T n'est pas bijective : si une valeur y admet un antécédent x (i.e. si $y = f(x)$), alors $\dots, x - 2T, x - T, x + T, x + 2T, \dots$ sont aussi des antécédents de y.*
- *Une application strictement monotone est nécessairement bijective entre son ensemble de départ et son ensemble d'arrivée.*

Définition Soit f une application bijective de E vers F. On a donc : $\forall y \in F, \exists!\, x \in E \,/\, y = f(x)$. On peut aussi noter $x = f^{-1}(y)$, ce qui définit une application f^{-1} de F vers E appelée **application réciproque** (ou **bijection réciproque**) de f. Elle vérifie à l'évidence $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_F$ (la fonction identité de F) et $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_E$ (la fonction identité de E).

$$E \underset{f^{-1}}{\overset{f}{\rightleftarrows}} F$$

Exemple *Les fonctions logarithme et exponentielle (cf rappels en Annexe E) sont réciproques l'une de l'autre :*

$$]0,+\infty[\underset{\exp}{\overset{\ln}{\rightleftarrows}} \mathbb{R} \qquad \textit{c'est-à-dire} \;\; (y = \ln x) \iff (x = \exp y)$$

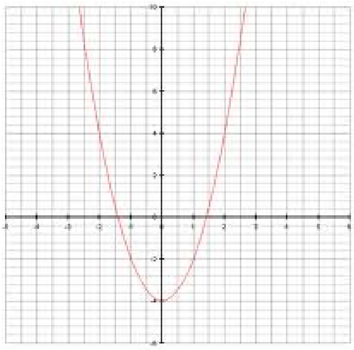
Exemple https://www.youtube.com/watch?v=cputgBhRT64

$f(x) = 2x^2 - 4$ est bijective de $[0,+\infty[$ vers $[-4,+\infty[$.

$$\textit{De plus : } y = 2x^2 - 4 \iff x^2 = \frac{y+4}{2} \iff x = \sqrt{\frac{y+4}{2}} \quad \textit{(car } x \geq 0\textit{)}$$

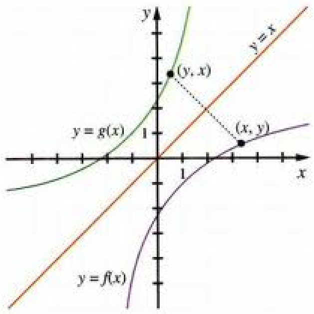
Donc on a : $f : \begin{array}{ccc} [0,+\infty[& \longrightarrow & [-4,+\infty[\\ x & \longrightarrow & y = 2x^2 - 4 \end{array}$

et $f^{-1} : \begin{array}{ccc} [-4,+\infty[& \longrightarrow & [0,+\infty[\\ y & \longrightarrow & x = \sqrt{\frac{y+4}{2}} \end{array}$



D'autres choix d'ensembles de départ et d'arrivée sont possibles. Par exemple, si on considère que f est bijective de $]-\infty,0[$ vers $[-4,+\infty[$, alors $f^{-1}(y) = -\sqrt{\frac{y+4}{2}}$

Interprétation graphique : le graphe de la fonction réciproque f^{-1} (notée g sur la figure ci-contre) est le symétrique du graphe de f par rapport à la droite $y = x$.



Une erreur fréquente consiste à confondre f^{-1} (fonction réciproque de f) et $1/f$ (fonction inverse de f). Dans l'exemple précédent, $1/f$ est la fonction qui à x associe $1/(2x^2-4)$.

Dérivée d'une application réciproque Soit f une bijection d'un intervalle I vers un intervalle J. Soient $a \in I$ et $b = f(a)$. Si f est dérivable en a et si $f'(a) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en b et $(f^{-1})'(b) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(b))}$.

Exemple *La fonction racine carrée étant la réciproque de la fonction carrée, on peut calculer sa dérivée avec cette formule. On pose donc $f(x) = x^2$, et on a $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$. Soient a et b tels que $b = f(a)$, c'est-à-dire $b = a^2$. Pour a strictement positif, on a bien $f'(a) = 2a \neq 0$, et donc :*

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))} = \frac{1}{2f^{-1}(b)} = \frac{1}{2\sqrt{b}}$$

On retrouve bien la formule connue pour la dérivée de la racine carrée.

Fonctions trigonométriques inverses Les fonctions sinus, cosinus et tangente (cf Annexe D) sont périodiques, et donc non bijectives. Si l'on se restreint toutefois à une partie bien choisie de leur domaine de définition, leurs restrictions sont continues et strictement monotones, et donc bijectives. On peut donc définir leurs fonctions réciproques, appelées **fonctions trigonométriques inverses** : arcsinus, arccosinus et arctangente. Ces fonctions sont détaillées en Annexe F.