Exo 1 f_1 matrice associée $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

Determiner ses valeurs propres avec

poly charactéristique $= \begin{vmatrix} t+1 & -2 \\ -2 & t+1 \end{vmatrix} = (t+1)^2 - 2^2 = 0$

$$\iff (t+1)^2 = 4$$
$$\iff t+1 = \pm 2$$
$$\iff t = -3, +1$$

vecteur propre pour $t = -3$ soln du système

$$\begin{pmatrix} t+1 & -2 \\ -2 & t+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow y = -x$$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ vecteur propre

vecteur propre pour $t = +1$ $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow y = x$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ vecteur propre

la matrice de f_1 dans la base $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est $\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Matrices non diagonalisables 2 cas de figure

1/ valeurs propres complexes $\notin \mathbb{R}$

2/ valeur propres sont pas distinctes

+ pas assez de vect propres

la matrice de f_2 est $\begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

son poly charactenistique $\begin{vmatrix} -1-t & -5 \\ 1 & 1-t \end{vmatrix} = t^2 - 1 + 5$

$= t^2 + 4 = 0$

$\Rightarrow t = \pm 2i \notin \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ pas diagonalisable

la matrice de f_3 est $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

son poly charactenistique $\begin{vmatrix} t-2 & -1 \\ 1 & t \end{vmatrix} = t^2 - 2t + 1$

$= (t-1)^2 = 0$

$\Rightarrow t = 1$

"unique" valeur propre $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow y = -x$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ vecteur propre

les vecteurs propres ne forment pas une base

$\Rightarrow$ pas diagonalisable

la matrice de f_4 est $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 3 & 3 & 2 \\ -3 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} B$

λ est valeur propre de $A \iff 2\lambda$ est valeur propre d B

car si $Av = \lambda v$ alors $2A\vec{v} = 2\lambda\vec{v} \iff B\vec{v} = (2\lambda)\vec{v}$

Rq vecteur propre est le même pour A et B

$$\begin{vmatrix} 1-t & 1 & -2 \\ 3 & 3-t & 2 \\ -3 & -1 & -t \end{vmatrix}$$

$$(1-t)(t^2-3t+2) - (-3t+6) - 2(-3+3(3-t))$$

$$= (1-t)(t-2)(t-1) + 3(t-2) + 6(t-3+1)$$

$$= (t-2)(-(t-1)^2+9)$$

$$= -(t-2)((t-1)^2-9)$$

$$= -(t-2)(t-1-3)(t-1+3) \quad = -(t-2)(t+2)(t-4)$$

valeurs propres de $B = 2, -2, 4$

de $A = 1, -1, 2$

les valeurs propres sont distincts $\Rightarrow$ A diagonalisable

vecteur propre pour $t = 2$

$$\begin{matrix} -1 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 2 \\ -3 & -1 & -2 \end{matrix} \quad \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix} = \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \iff \begin{aligned} -x + y - 2z &= 0 \\ 3x + y + 2z &= 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow 2x + 2y = 0 \Rightarrow y = -x$

$\Rightarrow z = -x$

subs

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ vect propre

pour $t = 4$ $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\quad t = -2$ $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Exo 2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

On commence par mq 3 est valeur propre

$$A - tI_3 = \begin{pmatrix} 1-t & -2 & -2 \\ -2 & 1-t & -2 \\ -2 & -2 & 1-t \end{pmatrix}$$

on pose $t=3$ $= \begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$

det $A-3I_3 = 0$ car $\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 3$ valeur propre

On va trouver les vecteurs propres pour $t=3$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \ker A-3I_3 \iff \begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff x + y + z = 0$$

base $= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

l'autre valeur propre $= -3$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} = -3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2/ base $= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 3/ Matrice de f $= \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

Exo 3

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ A n'est pas inversible $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \ker A$

$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ vecteur propre pour la valeur propre 2

$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ = matrice de A dans la base $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

on a $A = Q D Q^{-1}$ où $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ $Q^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$A^n = Q D^n Q^{-1}$ et $D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 2^n \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2^n & 2^n \\ 2^n & 2^n \end{pmatrix} = 2^{n-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Exo 4

plan $x=y$ eqn $x-y = (1\ -1\ 0)\ (x,y,z) = 0$

base $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

1/ OUI

2/

$$\begin{array}{ccc} V_1 & V_2 & V_3 \\ \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, & \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \end{array}$$

$s(V_1) = -V_1$

$s(V_2) = V_2$

$s(V_3) = V_3$

3/

$$\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$