1.1.3. *Algèbre linéaire*

Exercice 1.14. Les parties suivantes sont-elles des sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^2$? (justifier la réponse)

1. $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \leqslant y\}$
2. $B = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid xy = 0\}$
3. $C = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x = y\}$
4. $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x + y = 1\}$
5. $E = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 - y^2 = 0\}$
6. $F = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 0\}$

Exercice 1.15. On considère les parties suivantes de $\mathbf{R}^2$:

$$A = \{\, (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y - 2x = 0 \,\} \quad \text{et} \quad B = \{\, (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y - x^2 = 0 \,\}.$$

1. Dessiner, sur deux dessins différents, les parties A et B.
2. Déterminer, en justifiant vos réponses, si A ou B sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^2$.

Exercice 1.16. On considère la partie F de $\mathbf{R}^3$ définie par

$$F = \{\, (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x + 2y - z = 0 \,\}$$

1. Démontrer, en utilisant la définition, que l'ensemble F est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$.
2. Utiliser la notion de noyau pour donner une autre justification du fait que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$.

Exercice 1.17. On considère l'application φ de $\mathbf{R}^3$ dans $\mathbf{R}$ définie par

$$(x, y, z) \mapsto x - y + z.$$

1. Démontrer que φ est linéaire.
2. Démontrer que φ est surjective.
3. Soit $P = \mathrm{Ker}(\varphi)$. Quelle est la dimension de P ?
4. Soit $\vec{u} = (1, 0, 0)$ et soit $D = \mathrm{Vect}(\vec{u})$. Que vaut $\varphi(\vec{u})$?
5. Soit $\vec{v} \in \mathbf{R}^3$.
   (a) Si $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$ avec $\vec{v}_1 \in D$ et $\vec{v}_2 \in P$, justifier que $\varphi(v) = \varphi(v_1)$ puis que $\vec{v}_1 = \frac{\varphi(v)}{\varphi(u)}\vec{u}$.
   (b) Prouver qu'il existe un unique couple $(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ avec $\vec{v}_1 \in D$ et $\vec{v}_2 \in P$ tel que $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$.

Exercice 1.18. Certaines des transformations qui servent dans les logiciels de graphisme ou de gestion d'images sont des endomorphimes linéaires du plan $\mathbf{R}^2$. Par exemple, la rotation d'un quart de tour à droite est donnée par l'application linéaire $(x, y) \longmapsto (y, -x)$. Pour chaque application linéaire ci-dessous, décrire en termes simples la transformation géométrique correspondante.

$$(x, y) \longmapsto (-x, y) \qquad (x, y) \longmapsto (x/2, y/2)$$
$$(x, y) \longmapsto (2x, y) \qquad (x, y) \longmapsto (x + y, y).$$

Exercice 1.19. Parmi les applications de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}^2$ définies par les relations qui suivent, déterminer lesquelles sont linéaires.

$$\begin{array}{lll} f_1(x,y) = (x+y, x-y) & f_2(x,y) = (|x|+|y|, 2) & f_3(x,y) = (x, -y) \\ f_4(x,y) = (xy, y) & f_5(x,y) = (x-y+1, x) & f_6(x,y) = \left(\dfrac{1}{1+x^2}, \dfrac{1}{1+y^2}\right) \end{array}$$

pour tous $x, y \in \mathbf{R}$.

Exercice 1.20. Pour chacune des applications ci-dessous, vérifier qu'elle est linéaire et determiner son noyau, son image ainsi qu'une base de chacun de ces sous-espaces.

$$f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (2x+3y, 3x-y) \end{array} \qquad f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (2x+3y, -4x-6y) \end{array}$$

$$f_3 : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^3 & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & (2x+y+z) \end{array} \qquad f_4 : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^3 & \longrightarrow & \mathbf{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y+z, 2x+y-z) \end{array}$$

Exercice 1.21. Pour chacune des familles suivantes de vecteurs de $\mathbf{R}^n$ ($n = 2, 3, 4$ suivant le cas) déterminer si elle forme une base de cet espace. Si c'est le cas, trouver les coordonnées d'un n-uplet arbitraire $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ dans cette base.

1. $((2, 3), (1, 1))$;
2. $((2, 0), (1, 1), (1, 2))$;
3. $((1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1))$;
4. $((-2, 4, 0), (0, 1, 1), (1, 1, 1))$;
5. $((-1, 5, 4), (0, 1, 1), (1, -4, -3))$;
6. $((-1, 5, 4, 0), (0, 1, 1, 2), (1, -4, -3, -1))$;
7. $((-1, 5, 4, 0), (0, 1, 1, 2), (1, -4, -3, -1), (0, 2, 2, 1))$;

Exercice 1.22. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur les paramètres réels a et b pour que chacune des familles suivantes soient des bases de $\mathbf{R}^3$.

1. $((1, 1, 1), (0, a, 1), (0, 0, b))$,
2. $((1, 0, 1), (a, b, 1), (b, a, 1))$,
3. $((1, a, b), (a, 1, a), (b, b, 1))$,
4. $((a, a, b), (a, b, a), (b, a, a))$,

5. $((0,a,b),(a,0,b),(a,b,0))$.

Exercice 1.23. Pour les applications linéaires suivantes de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^m$, préciser les entiers n et m, donner la matrice de f puis donner une base de $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.

1. $f_1 : (x,y) \mapsto (x+3y, 2x-y, -x+5y)$;
2. $f_2 : (x,y,z) \mapsto (x+y+2z, x-y)$;
3. $f_3 : (x,y,z) \mapsto (-x-2y+z, 2x-y, x-3y+z)$;
4. $f_4 : (x,y,z) \mapsto (x+y+z, 2x-y, z)$.

Exercice 1.24. Calculer le déterminant des matrices suivantes. Sont-elles inversibles? Inverser celles qui le sont.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 12 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 1.25. Soit $\vec{u} \in \mathbf{R}^2$ un vecteur de norme 1 et soit D la droite vectorielle engendrée par $\vec{u}$.

1. Écrire la matrice de la projection orthogonale sur D.
2. Écrire la matrice de la symétrie orthogonale par rapport à D. Calculer le déterminant de cette matrice.
3. Soit s_1 et s_2 des symétries orthogonales par rapport à des droites vectorielles dans $\mathbf{R}^2$. En utilisant le calcul matriciel justifier que la composée $s_1 \circ s_2$ est une rotation.

Exercice 1.26. On pose

$$\vec{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right);$$

on note D la droite vectorielle engendrée par $\vec{u}$ et P le plan vectoriel d'équation $X + Y + Z = 0$.

1. Trouver deux vecteurs $\vec{f_1}$ et $\vec{f_2}$ orthogonaux et de norme 1 dans P.
2. (a) Trouver une base orthonormée $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ de $\mathbf{R}^3$, avec $\vec{e}_1 \in D$.
   (b) Donner la matrice de changement de base Q de la base usuelle de $\mathbf{R}^3$ vers la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.
   (c) Calculer son déterminant.
   (d) Quitte à échanger $\vec{e}_2$ et $\vec{e}_3$, expliquer comment on peut se ramener au cas où $\det(Q) = 1$.
   (e) Que vaut le produit ${}^tQQ$?
   (f) La matrice Q est-elle inversible? Trouver son inverse.

3. Écrire dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ la matrice de la rotation r_θ d'axe la droite D orientée par $\vec{u}$ et d'angle $2\pi/3$.
4. Donner la matrice M de r_θ dans la base usuelle de $\mathbf{R}^3$.
5. Que vaut M^3?
6. Calculer M^k pour tout entier $k \in \mathbf{Z}$.

Exercice 1.27. Soit

$$M = \begin{pmatrix} \sqrt{3}-1 & 0 & -2\sqrt{3} \\ 0 & 2 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & -1-\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

1. Calculer $\det(M)$.
2. Calculer M^2 et M^3.
3. En déduire l'inverse de M.
4. Calculer M^k pour tout $k \in \mathbf{N}$. On pourra écrire $k = 3m + r$ avec $m \in \mathbf{N}$ et $r = 0, 1$ ou 2.
5. Pour tout $k \in \mathbf{N}$, calculer $\det(M^k)$ de deux manières différentes.

Exercice 1.28. Calculer le déterminant des matrices suivantes. Sont-elles inversibles? Inverser celles qui le sont. Calculer noyau et image de l'application linéaire associée pour celles qui ne sont pas inversibles.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 4 & -1 & 1 \\ 6 & 2 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 3 & 6 \\ 4 & -1 & -1 \\ 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 1.29. Soit $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'application linéaire dont la matrice dans la base usuelle de $\mathbf{R}^3$ est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que l'application f possède exactement deux valeurs propres et que l'une d'entre elle est 3.
2. Donner une base $\boldsymbol{e}$ de $\mathbf{R}^3$ formée de vecteurs propres pour f.
3. Quelle est la matrice de f dans la base $\boldsymbol{e}$?

Exercice 1.30. Pour chaque matrice suivante, Donner l'application linéaire f correspondante. Déterminer si l'application linéaire est diagonalisable? Si c'est le cas, donner une base dans laquelle la matrice de l'application linéaire est diagonale.

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 1 \\ -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

1.1.4. *Applications aux fonctions en plusieurs variables*

Exercice 1.31. On considère la fonction de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$ donnée par

$$f : (x,y) \mapsto (x^2+y^2)^2 - 2x^2 + 2y^2.$$

1. Quel est le domaine de définition de f?
2. Pour tout $A = (x,y) \in \mathscr{D}_f$ calculer $\operatorname{grad}_A(f)$.
3. Prouver que la fonction f possède exactement trois points critiques que l'on déterminera.
4. Calculer la matrice hessienne de A en un point $A = (x,y)$.
5. Pour chacun des trois points trouvés à la question 3:
   (a) Déterminer les valeurs propres de la matrice hessienne;
   (b) En déduire si la fonction f a un minimum, un maximum ou un point selle en ce point.

Exercice 1.32. On considère la fonction de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$ donnée par

$$f : (x,y) \mapsto \exp(-x^2-y^2).$$

1. Quel est le domaine de définition de f?
2. Écrire la fonction comme la composée de deux applications et en déduire directement que f admet un maximum en un unique point que l'on précisera. Donner la valeur de ce maximum.
3. Pour tout $A = (x,y) \in \mathscr{D}_f$, calculer $\operatorname{grad}_A(f)$.
4. Trouver l'ensemble des points critiques de f.
5. Calculer la matrice hessienne de A en un point $A = (x,y)$.
6. Déterminer les valeurs propres de la matrice hessienne de f en chacun de ses points critiques. Quel est le lien avec la question 2?

Exercice 1.33. On considère la fonction de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$ donnée par

$$f : (x,y) \mapsto xy - x + y.$$

1. Quel est le domaine de définition de f?
2. Pour tout $A = (x,y) \in \mathscr{D}_f$, calculer $\operatorname{grad}_A(f)$.

3. Prouver que la fonction f possède exactement un point critique que l'on déterminera.
4. Calculer la matrice hessienne de A en un point $A = (x, y)$.
5. Déterminer les valeurs propres de la matrice hessienne en le point critique.
6. En déduire si la fonction f a un minimum, un maximum ou un point selle en ce point.