Fonctions de plusieurs variables

Exercices

1.0.1. *Application réciproque*

Exercice 1.1. Pour chacune des fonctions d'une variable réelle suivantes, déterminer le domaine de définition de la fonction et sa dérivée en tout point où elle est dérivable. Faire alors le tableau de variations de la fonction et tracer le graphe de la fonction.

1. $f_1 : x \mapsto \arcsin(x)$;
2. $f_2 : x \mapsto \arccos(x)$;
3. $f_3 : x \mapsto \arctan(x)$.

Quelle est la valeur de l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x\,?$$

1.0.2. *Dérivées partielles, gradient*

Exercice 1.2. Soit n un entier strictement positif et soit $k \in \{1, \dots, n\}$. On note X_k l'application k-ème composante de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}$ définie par

$$X_k : (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_k.$$

1. Dans cette question uniquement on suppose que $n = 2$.
   (a) Décrire les lignes de niveau de X_1 et X_2.
   (b) Donner une description géométrique des graphes de X_1 et X_2.
2. Soit $a_1, \dots, a_n$ des nombres réels ; on pose $A = (a_1, \dots, a_n)$.
   (a) Décrire en des termes simples la fonction partielle $X_k(a_1, \dots, a_{i-1}, \bullet, a_{i+1}, \dots, a_n)$ (on distinguera les cas $i \neq k$ et $i = k$).
   (b) Calculer les dérivées partielles $\frac{\partial X_k}{\partial X_i}(A)$ pour $i \in \{1, \dots, n\}$.
   (c) Que vaut le gradient $\mathrm{grad}_A(X_k)$?
   (d) Décrire l'application $\mathrm{d}X_{k\,A}$.

Exercice 1.3. Calculer les dérivées partielles des fonctions suivantes en précisant leur domaine de définition.

1. $f_1 : (x, y) \mapsto x \ln(y^2 + 1)$;
2. $f_2 : (x, y) \mapsto (x - y) \ln(x^2 - y^2)$;
3. $f_3 : (x, y) \mapsto e^{(x^2+y^3)} - \cos(xy)$;
4. $f_4 : (x, y) \mapsto \dfrac{x^2}{x + 2y}$.

Pour chacune des fonctions précédentes calculer la différence $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) - \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$ pour tout (x,y) appartenant au domaine de définition de la fonction. Que constatez-vous ?

Exercice 1.4. On définit les applications de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$ suivantes :

$$\begin{aligned} f_1 &: (x,y) \mapsto \sqrt{x^2+y^2} \\ f_2 &: (x,y) \mapsto (x+2)^2+3 \\ f_3 &: (x,y) \mapsto x+2y+3 \\ f_4 &: (x,y) \mapsto x^2-9y^2 \end{aligned}$$

Dans la suite de l'énoncé l'entier i parcourt $\{1,2,3,4\}$.

1. Pour toute valeur c de l'application f_i, trouver une fonction $g_{i,c}$ de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}^2$ dont l'image, c'est-à-dire l'ensemble des valeurs, est la ligne de niveau
$$f_i^{-1}(\{c\}) = \{\,(x,y) \in \mathbf{R}^2 | f_i(x,y) = c\,\}$$
2. Calculer le gradient de f_i.
3. Tracer quelques lignes de niveau et représenter le gradient en quelques points de ces lignes de niveau. Que constatez-vous ?
4. Calculer le vecteur dérivé (ou vitesse) $g'_{i,c}(t)$ et faire le produit scalaire de $g'_{i,c}(t)$ et du gradient de f_i en $g_{i,c}(t)$. Qu'obtenez-vous ?

Exercice 1.5. On considère la fonction $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ définie par

$$f : (x,y) \longmapsto \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1. Expliquer pourquoi f admet des dérivées partielles en tout point (x,y) de $\mathbf{R}^2$ et les calculer (on traitera à part le cas $(x,y) = (0,0)$).
2. Démontrer que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ existent et les comparer.

1.0.3. *Équations aux dérivées partielles*

Problème 1.1 (Équation des ondes). On note Δ l'opérateur *laplacien*

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial X^2} + \frac{\partial^2}{\partial Y^2}.$$

L'*équation des ondes* ou *équation de* D'ALEMBERT pour une fonction f en trois variables notées T, X et Y s'écrit

$$\Delta f = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial T^2}. \tag{1}$$

On se donne un point $A \in \mathbf{R}^2$, un vecteur $u \in \mathbf{R}^2$ de norme égale à 1 et on considère l'application de $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$ donnée par

$$f_{A,u} : (t, M) \mapsto \cos\left(u \cdot \overrightarrow{AM} - ct\right)$$

où $u \cdot v$ désigne le produit scalaire des vecteurs u et v.

1. Soit $t_0 \in \mathbf{R}$. Décrire les lignes de niveau de l'application $M \mapsto f_{A,u}(t_0, M)$.
2. Exprimer $f_{A,u}$ en termes des coordonnées (t, x, y).
3. Vérifier que $f_{A,u}$ est solution de l'équation (1).
4. On pose $A = (-1, 0)$, $B = (1, 0)$, $u = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ et $v = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. On pose $g_1 = f_{A,u} + f_{B,v}$.
   (a) Justifier que g_1 est solution de (1).
   (b) Soit M un point de $\mathbf{R}^2$. Donner la valeur minimale α et la valeur maximale β de la fonction $t \mapsto g_1(t, M)$. La différence $\beta - \alpha$ est appelée *l'amplitude* de g_1 en M.
   (c) Pour quels points M l'amplitude de g_1 est-elle maximale ?
   (d) Existe-t-il des points en lesquels l'amplitude est nulle ?
5. Soient $f_1, \dots, f_m$ des solutions de (1) et soient $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ des nombres réels. Que peut-on dire de l'application

$$\alpha_1 f_1 + \cdots + \alpha_m f_m?$$

1.0.4. *Changement de variables*

Exercice 1.6. On rappelle que les coordonnées sphériques sont définies par l'application F de $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}^3$ donnée par

$$(\rho, \theta, \varphi) \mapsto (\rho\cos(\theta)\sin(\varphi), \rho\sin(\theta)\sin(\varphi), \rho\cos(\varphi))$$

1. Quel est l'ensemble des valeurs prises par les fonctions cos et sin ?
2. On suppose que (x, y) est un point du cercle unité, c'est-à-dire qu'il vérifie $x^2 + y^2 = 1$, décrire l'ensemble des nombres réels θ tels que $x = \cos(\theta)$ et $y = \sin(\theta)$.
3. Prouver que l'application F est surjective.

4. Trouver une partie U de l'ensemble de définition de F de sorte que, pour tout (x, y, z) de $\mathbf{R}^3$ vérifiant $(x, y) \neq (0, 0)$, il existe un unique $(\rho, \theta, \varphi) \in U$ tel que $F(\rho, \theta, \varphi) = (x, y, z)$.

Problème 1.2 (Seconde loi de Képler). On considère la position $M(t)$ d'une planéte en coordonnées polaires :

$$M(t) = (r(t)\cos(\theta(t)), r(t)\sin(\theta(t)))$$

où r est une application de classe $\mathscr{C}^2$ (deux fois dérivable et de dérivée seconde continue) de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}_+^*$ et θ une application de classe $\mathscr{C}^2$ de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$. On suppose que l'unique force exercée par cette planète est celle d'une étoile de sorte que le centre de gravité du système soit à tout instant l'origine du repère $O = (0, 0)$. Autrement dit la courbe paramétrée $M : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$ vérifie la condition

$$\vec{a}(t) = \frac{Gm}{\|\overrightarrow{M(t)O}\|^3}\overrightarrow{M(t)O}$$

où G désigne la constante universelle de la gravitation, m la masse de l'étoile et $\vec{a}(t) = M''(t)$ est l'accélération de M à l'instant t.

1. Calculer pour tout $t \in \mathbf{R}$, la valeur du vecteur vitesse $\vec{v}(t) = M'(t)$ en termes des fonctions r et θ et de leurs dérivées.
2. Calculer pour tout $t \in \mathbf{R}$, la valeur du vecteur accélération $\vec{a}(t) = M''(t)$.
3. Pour tout $t \in \mathbf{R}$, on pose

$$\vec{u}_1(t) = (\cos(\theta(t)), \sin(\theta(t))) \quad \text{et} \quad \vec{u}_2(t) = (-\sin(\theta(t)), \cos(\theta(t)))$$

   (a) Exprimer l'accélération $\vec{a}(t)$ en termes de $\vec{u}_1(t)$ et $\vec{u}_2(t)$.

   (b) Écrire le vecteur $\frac{Gm}{\|\overrightarrow{M(t)O}\|^3}\overrightarrow{M(t)O}$ à l'aide de $\vec{u}_1(t)$ et $\vec{u}_2(t)$).

4. À l'aide des questions précédentes, prouver la seconde loi de Képler : la *vitesse aréolaire*, définie par

$$r(t)^2\theta'(t)$$

   ne dépend pas de t.

Calcul Matriciel

Exercices