

# Fonctions de plusieurs variables

## Exercices

### 1.0.1. Application réciproque

**Exercice 1.1.** Pour chacune des fonctions d'une variable réelle suivantes, déterminer le domaine de définition de la fonction et sa dérivée en tout point où elle est dérivable. Faire alors le tableau de variations de la fonction et tracer le graphe de la fonction.

1.  $f_1 : x \mapsto \arcsin(x)$  ;
2.  $f_2 : x \mapsto \arccos(x)$  ;
3.  $f_3 : x \mapsto \arctan(x)$ .

Quelle est la valeur de l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx ?$$

### 1.0.2. Dérivées partielles, gradient

**Exercice 1.2.** Calculer les dérivées partielles des fonctions suivantes en précisant leur domaine de définition.

1.  $f_1 : (x, y) \mapsto x \ln(y^2 + 1)$  ;
2.  $f_2 : (x, y) \mapsto (x - y) \ln(x^2 - y^2)$  ;
3.  $f_3 : (x, y) \mapsto e^{(x^2+y^3)} - \cos(xy)$  ;
4.  $f_4 : (x, y) \mapsto \frac{x^2}{x + 2y}$ .

Pour chacune des fonctions précédentes calculer la différence  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y)$  pour tout  $(x, y)$  appartenant au domaine de définition de la fonction. Que constatez-vous ?

**Exercice 1.3.** On définit les applications de  $\mathbf{R}^2$  dans  $\mathbf{R}$  suivantes :

$$\begin{aligned} f_1 : (x, y) &\mapsto \sqrt{x^2 + y^2} \\ f_2 : (x, y) &\mapsto (x + 2)^2 + 3 \\ f_3 : (x, y) &\mapsto x + 2y + 3 \\ f_4 : (x, y) &\mapsto x^2 - 9y^2 \end{aligned}$$

Dans la suite de l'énoncé l'entier  $i$  parcourt  $\{1, 2, 3, 4\}$ .

1. Pour toute valeur  $c$  de l'application  $f_i$ , trouver une fonction  $g_{i,c}$  de  $\mathbf{R}$  dans  $\mathbf{R}^2$  dont l'image, c'est-à-dire l'ensemble des valeurs, est la ligne de niveau

$$f_i^{-1}(\{c\}) = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid f_i(x, y) = c\}$$

2. Calculer le gradient de  $f_i$ .
3. Tracer quelques lignes de niveau et représenter le gradient en quelques points de ces lignes de niveau. Que constatez-vous ?
4. Calculer le vecteur dérivé (ou vitesse)  $g'_{i,c}(t)$  et faire le produit scalaire de  $g'_{i,c}(t)$  et du gradient de  $f_i$  en  $g_{i,c}(t)$ . Qu'obtenez-vous ?

**Exercice 1.4.** On considère la fonction  $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$  définie par

$$f : (x, y) \mapsto \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

1. Expliquer pourquoi  $f$  admet des dérivées partielles en tout point  $(x, y)$  de  $\mathbf{R}^2$  et les calculer (on traitera à part le cas  $(x, y) = (0, 0)$ ).
2. Démontrer que  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$  et  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$  existent et les comparer.

### 1.0.3. Équations aux dérivées partielles

**Problème 1.1** (Équation des ondes). On note  $\Delta$  l'opérateur *laplacien*

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial X^2} + \frac{\partial^2}{\partial Y^2}$$

L'équation des ondes ou équation de D'ALEMBERT pour une fonction  $f$  en trois variables notées  $T, X$  et  $Y$  s'écrit

$$(1) \quad \Delta f = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial T^2}.$$

On se donne un point  $A \in \mathbf{R}^2$ , un vecteur  $u \in \mathbf{R}^2$  de norme égale à 1 et on considère l'application de  $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^2$  dans  $\mathbf{R}$  donnée par

$$f_{A,u} : (t, M) \mapsto \cos(u \cdot (M - A) - ct)$$

où  $u \cdot v$  désigne le produit scalaire des vecteurs  $u$  et  $v$ .

1. Soit  $t_0 \in \mathbf{R}$ . Décrire les lignes de niveau de l'application  $M \mapsto f_{A,u}(t_0, M)$ .
2. Exprimer  $f_{A,u}$  en termes des coordonnées  $(t, x, y)$ .
3. Vérifier que  $f_{A,u}$  est solution de l'équation (1).

4. On pose  $A = (-1, 0)$ ,  $B = (1, 0)$ ,  $u = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$  et  $v = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ . On pose  $g_1 = f_{A,u} + f_{B,v}$ .
- (a) Justifier que  $g_1$  est solution de (1).
  - (b) Soit  $M$  un point de  $\mathbf{R}^2$ . Donner la valeur minimale  $\alpha$  et la valeur maximale  $\beta$  de la fonction  $t \mapsto g_1(t, M)$ . La différence  $\beta - \alpha$  est appelée *l'amplitude* de  $g_1$  en  $M$ .
  - (c) Pour quels points  $M$  l'amplitude de  $g_1$  est-elle maximale ?
  - (d) Existe-t-il des points en lesquels l'amplitude est nulle ?
5. Soient  $f_1, \dots, f_m$  des solutions de (1) et soient  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  des nombres réels. Que peut-on dire de l'application

$$\alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_m f_m?$$

