Fonctions de plusieurs variables

Exercices

1.1. Exercices

1.1.1. *Fonctions d'une variable*

Exercice 1.1. Pour chacune des fonctions d'une variable réelle suivantes, déterminer le domaine de définition et tracer le graphe de la fonction

1. $f_1 : x \mapsto \frac{x}{3}$;
2. $f_2 : x \mapsto 2x + 3$;
3. $f_3 : x \mapsto 1 + \frac{1}{x+2}$;
4. $f_4 : x \mapsto |2x - 3|$.

Exercice 1.2. Pour chacune des fonctions d'une variable réelle suivantes, déterminer le domaine de définition de la fonction et sa dérivée en tout point où elle est dérivable. Faire alors le tableau de variations de la fonction et tracer le graphe de la fonction.

1. $f_1 : x \mapsto x^2 - 2x + 1$;
2. $f_2 : x \mapsto \sqrt{3 - 2x}$;
3. $f_3 : x \mapsto \frac{1}{x^2+1}$;
4. $f_4 : x \mapsto \frac{x-1}{x+1}$;
5. $f_5 : x \mapsto \cos(x)$;
6. $f_6 : x \mapsto e^{-x^2}$
7. $f_7 : x \mapsto \begin{cases} \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$

1.1.2. *Fonctions en plusieurs variables*

Exercice 1.3. Trouver pour les applications suivantes le sous-ensemble de $\mathbf{R}^2$ sur lequel elles sont définies.

1. $f_1 : (x, y) \mapsto \frac{1}{x^2-y}$,
2. $f_2 : (x, y) \mapsto \sqrt{x^2 - y}$,
3. $f_3 : (x, y) \mapsto \ln(x + \ln(y))$,
4. $f_4 : (x, y) \mapsto \mathrm{e}^{x^2-y^2}$,
5. $f_5 : (x, y) \mapsto \frac{1}{y\sin(x)}$

Exercice 1.4. Pour chacune des fonctions en deux variables suivantes, déterminer leur domaine de définition et représenter l'allure du graphe en en précisant les éventuelles symétries.

1. $f_1 : (x, y) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2}$;
2. $f_2 : (x, y) \mapsto (x + 2)^2 + 3$;
3. $f_3 : (x, y) \mapsto x + 2y + 3$
4. $f_4 : (x, y) \mapsto x + 2y$
5. $f_5 : (x, y) \mapsto -x + y + 4$
6. $f_6 : (x, y) \mapsto -x + y$

Exercice 1.5 (Équation d'état des gaz parfaits). L'équation d'état de n moles d'un gaz parfait est donnée par l'équation :

$$pV = nRT$$

où p désigne la pression dont on suppose qu'elle est uniforme sur le volume considéré, V est le volume de gaz, R est la constante universelle des gaz parfaits et T la température absolue (en Kelvin) également supposée uniforme.

1. (a) Exprimer T comme une fonction en deux variables p et V.
   (b) Quel est le domaine de définition de cette fonction du point de vue mathématique ?
   (c) Quelle partie de ce domaine a un sens du point de vue physique ?
   (d) Tracer l'allure du graphe de cette fonction.
   (e) Tracer des courbes de niveau de cette fonction.
2. (a) L'ensemble des solutions à coordonnées strictement positives de l'équation forme-t-il également le graphe d'une fonction g en les variables p et T ?
   (b) Quel est son domaine de définition ?
   (c) Tracer des courbes de niveau de la fonction g.

Exercice 1.6. On considère la fonction en deux variables f définie par la formule

$$f : (x, y) \mapsto \cos\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right).$$

1. Quelle est le domaine de définition de cette application ?
2. Exprimer f comme la composée de deux applications.
3. Rapeller l'équation cartésienne dans un repère othornomé d'un cercle $\mathscr{C}$ de centre un point A de coordonnées (x_A, y_A) et de rayon un nombre réel $R > 0$.

4. Justifier que les lignes de niveaux de f sont des réunions de cercles centrés en l'origine. Tracer la ligne de niveau $f^{-1}(\{0\})$.

Dans la suite, on fixe un point $\Omega = (x_\Omega, y_\Omega) \in \mathbf{R}^2$ et on considère l'application

$$f_\Omega : (x, y) \mapsto \cos\left(\sqrt{(x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2}\right).$$

5. Écrire f_Ω comme la composée de *trois* applications.
6. Décrire les lignes de niveau de f_Ω.
7. Donner un maximum et un minimum global pour la fonction f_Ω.