

**CC2 4 decembre**

Durée : 1h

*Documents et appareils électroniques (dont telephones portables et calculatrices) interdits. Toutes les réponses doivent être justifiées.*

---

**Exercice 1**

Soit  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  et  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  les applications :

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + y + z \\ x + 2y + 3z \end{pmatrix}, g : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + y \\ x + 2y \\ x + 3y \end{pmatrix}$$

1. Justifier que  $f, g$  ainsi que  $f \circ g$  et  $g \circ f$  sont des applications linéaires.
  2. Trouver le noyau de  $f$  et de  $g$ .
  3. Calculer la matrice de  $f \circ g$  et de  $g \circ f$ .
  4. Calculer le determinant de chacune de ces matrices.
  5. L'application  $f$  est-elle surjective ? Justifier.
  6. L'image de  $g$  est un plan de  $\mathbb{R}^3$ .
    - Donner une forme paramétrique de ce plan.
    - Donner une équation cartésienne de ce plan.
- 

1. L'application  $f$  est linéaire car elle s'écrit sous forme matricielle :

$$f(\vec{x}) = A_f \vec{x}$$

ou  $A_f$  est la matrice de  $f$  :

$$A_f = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

De même pour  $g$  sa matrice est :

$$A_g = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

2. Si  $(x, y, z)$  est dans le noyau de  $f$  alors

$$x + y + z = 0, \tag{1}$$

$$x + 2y + 3z = 0. \tag{2}$$

Il en résulte que  $y + 2z = 0$  et donc  $y = -2z$ . En remplaçant  $y$  par  $-2z$  dans (1) on obtient  $x = z$ . Donc le noyau de  $f$  est une droite passant par l'origine :

$$\left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Si  $(x, y)$  est dans le noyau de  $g$  alors

$$x + y = 0, \tag{3}$$

$$x + 2y = 0 \tag{4}$$

Il en résulte que  $y = 0$  et donc  $x = 0$ . Donc le noyau de  $g$  est trivial.

3. La matrice de  $f \circ g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  est donnée par le produit  $A_f A_g$  :

$$A_f A_g = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 14 \end{pmatrix}$$

De même pour  $g \circ f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  est donnée par le produit  $A_g A_f$  :

$$A_g A_f = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \\ 4 & 7 & 10 \end{pmatrix}$$

4. Le déterminant de  $A_f A_g$  est 6 et celui de  $A_g A_f$  est 0.
5. L'application  $f$  est surjective car tout vecteur de  $\mathbb{R}^2$  est combinaison linéaire de  $(1, 1)$  et  $(1, 2)$  qui sont les premières colonnes de  $A_f$ .
6. L'image de  $g$  est le plan passant par l'origine et généré par les vecteurs  $(1, 1, 1)$  et  $(1, 2, 3)$ .
  - Une forme paramétrique de ce plan est

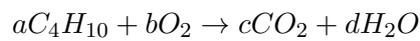
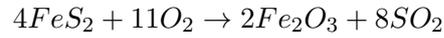
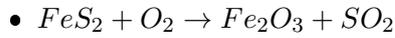
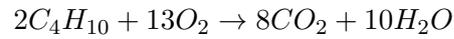
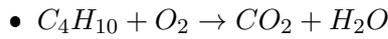
$$\left\{ s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, s, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

- ce plan consiste des vecteurs perpendiculaire au produit vectoriel de  $(1, 1, 1)$  et  $(1, 2, 3)$  à savoir  $(1, -2, 1)$ . Donc une équation cartésienne de ce plan est

$$x - 2y + z = 0.$$

## Exercice 2

En interprétant la conservation des divers éléments comme une condition linéaire sur les quantités de réactif, équilibrer les réactions suivantes :



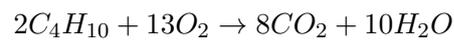
- Étape 1 : Écrire les équations de conservation

- Carbone (C) :  $4a = c$
- Hydrogène (H) :  $10a = 2d$
- Oxygène (O) :  $2b = 2c + d$

- Étape 2 : Résoudre le système Introduisez un paramètre (par exemple,  $a = 1$ ) pour simplifier. Alors :

- À partir de  $4a = c$  :  $c = 4$
- À partir de  $10a = 2d$  :  $d = 5$
- À partir de  $2b = 2c + d$  :  $2b = 8 + 5 \Rightarrow b = 6\frac{1}{2}$

- Pour éliminer les coefficients fractionnaires, multipliez par 2 :



### Exercice 3

- Calculer le déterminant de chacune de matrices.
- Déterminer le noyau de l'application linéaire associée.
- **Point bonus :** Montrer que deux matrices sont inversibles et l'une est l'inverse de l'autre.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ -7 & -1 & -8 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

---

- Le déterminant de  $A$  est 1, celui de  $B$  est 0 et celui de  $C$  est 1.
- En effet  $A$  et  $C$  sont inverses l'une de l'autre car

$$AC = CA = I_3.$$

Il s'en suit que  $\ker f_A = \{0\}$  et  $\ker f_C = \{0\}$ .

- Quant à  $B$  il n'est pas inversible car son déterminant est nul. Si  $(x, y, z)$  est dans le noyau de  $f_B$  alors

$$x + y - z = 0, \tag{5}$$

$$3x + y + 2z = 0, \tag{6}$$

$$-7x - y - 8z = 0. \tag{7}$$

En sommant (1) et (3) on obtient  $-6x - 9z = 0$  et donc  $x = -\frac{3}{2}z$ . En remplaçant  $x$  par  $-\frac{3}{2}z$  dans (1) on obtient  $y = \frac{5}{2}z$ . Donc le noyau de  $f_B$  est une droite passant par l'origine :

$$\left\{ t \begin{pmatrix} -3/2 \\ 5/2 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ t \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}.$$