UGA 2024-25 L2

CC1 MAT305

You can write in english.

Exercice 1

Calculer les derivées partielles f_x, f_y et f_{xy}, f_{yx} pour chacune des fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ suivantes :

1. $f(x,y) = (x^3 - y^3)e^{x^2+y^2}$

- $f_x = 3x^2 e^{x^2+y^2} + 2x(x^3 - y^3)e^{x^2+y^2} = (3x^2 + 2x^4 - 2xy^3)e^{x^2+y^2}$
- $f_y = -3y^2 e^{x^2+y^2} + 2y(x^3 - y^3)e^{x^2+y^2} = (-3y^2 + 2x^3y - 2y^4)e^{x^2+y^2}$
- $f_{yx} = f_{xy} = (6x^2y + 4x^4y - 6xy^2 - 4xy^4)\exp(x^2 + y^2)$

2. $f(x,y) = \arctan(x^2 + y^2)$

- $f_x = \frac{2x}{1+(x^2+y^2)^2}$
- $f_y = \frac{2y}{1+(x^2+y^2)^2}$
- $f_{xy} = f_{yx} = \frac{-8xy(x^2+y^2)}{(1+(x^2+y^2)^2)^2}$

3. $f(x,y) = y^5 + xy + 3\cos(x+y)$

- $f_x = y - 3\sin(x+y)$
- $f_y = 5y^4 + x - 3\sin(x+y)$
- $f_{yx} = f_{xy} = 1 - 3\cos(x+y)$

Exercice 2

Pour chacune des fonctions f suivantes calculer $f_{xx} + f_{yy}$:

1. $f(x, y) = x^3 - 3xy^2 + x$

- $f_x = 3x^2 - 3y^2 + 1 \Rightarrow f_{xx} = 6x$
- $f_y = -6xy \Rightarrow f_{yy} = -6x$

2. $f(x, y) = exp(x + y)\cos(x + y)$

- $f_x = e^{x+y}(\cos(x + y) - \sin(x + y))$
- $$\begin{aligned} f_{xx} &= e^{x+y}((\cos(x+y) - \sin(x+y)) + (-\sin(x+y) - \cos(x+y))) \\ &= -2e^{x+y}\sin(x+y) \end{aligned}$$
- $f_y = f_x$ et $\mathrm{f}_{yy} = f_{xx}$

3. $f(x, y) = \arctan(y/x)$

- $f_x = \frac{-y}{x^2+y^2} \Rightarrow f_{xx} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$
- $f_y = \frac{x}{x^2+y^2} \Rightarrow f_{yy} = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$

Exercice 3

On définit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par $f(x, y) = \exp(x^2 - 2x + 1 + y^2)$.

On commence par rappeler les définitions suivantes : f est le gradient de f et $\dot{\gamma}$ est le vecteur vitesse de γ.

- $f = (f_x, f_y)$
- $\dot{\gamma} = (\gamma'(t))$

On a

- $\gamma'(t) = (-2\sin(2t), 2\cos(2t))$
- $\mathrm{grad} f = \exp(x^2 - 2x + 1 + y^2)((2x - 2), 2y)$

1. Justifier que f est dérivable en tout point de $\mathbb{R}^2$ (on pourra utiliser le théorème de dérivation des fonctions composées).

> La fonction f est dérivable en tout point de $\mathbb{R}^2$ car elle est composée de fonctions dérivables à savoir $(x, y) \mapsto x^2 - 2x + 1 + y^2$ et $x \mapsto \exp(x)$.

2.
   - Calculer la valeur de f en $(1, 0)$.
   - Calculer les dérivées partielles de f en $(1, 0)$.

> La valeur de f en $(1, 0)$ est $\exp(0)$ et les dérivées partielles de f en $(1, 0)$ sont $f_x(1, 0) = 0$ et $f_y(1, 0) = 0$.

3. Déterminer les ensembles de niveaux de f et donner une interpretation geométrique.

> Les ensembles de niveaux de f sont les courbes des cercles de centre $(1, 0)$ et de rayon $\log(c)$ pour $c > 0$.

4. Monter que $f \circ \gamma$ est constante où $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (\cos(2t) + 1, \sin(2t))$ et préciser la valeur du constant.

> On a :
>
> $$\begin{aligned} f \circ \gamma(t) &= \exp(((\cos(2t) + 1) - 1)^2 + \sin^2(2t)) \\ &= \exp(\cos^2(2t) + \sin^2(2t)) = \exp(1) \end{aligned}$$

5.
   - Calculer le gradient de f et $\dot{\gamma}$ le vecteur vitesse de γ.
   - Calculer le produit scalaire $(\text{grad}\, f).\dot{\gamma}$ et representer le résultat graphiquement.

> - $\text{grad}_\gamma f = \exp(1)(2\cos(2t), 2\sin(2t))$
> - $\dot{\gamma} = (-2\sin(2t), 2\cos(2t))$
> - $(\text{grad}\, f).\dot{\gamma} = \exp(1)(-2\sin(2t) \cdot (2\cos(2t) + 2\cos(2t) \cdot (2\sin(2t)) = 0$

6. Quelle est le minimum de f sur $\mathbb{R}^2$? Justifiez votre réponse.

Le minimum de f sur $\mathbb{R}^2$ est $\exp(0)$ car $f(x,y) = \exp((x-1)^2 + y^2)$ et $(x-1)^2 + y^2 \geq 0$.