Exercice 2

On considère l'expression $f(x,y) = xy^2 - y^3 + \ln(1 - x^2 - y^2)$.

1. Déterminer l'ensemble D_f des $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $f(x,y)$ est bien définie, et le représenter graphiquement.
2. Calculer les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$;
3. Calculer
   (a) $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)$;
   (b) $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$;

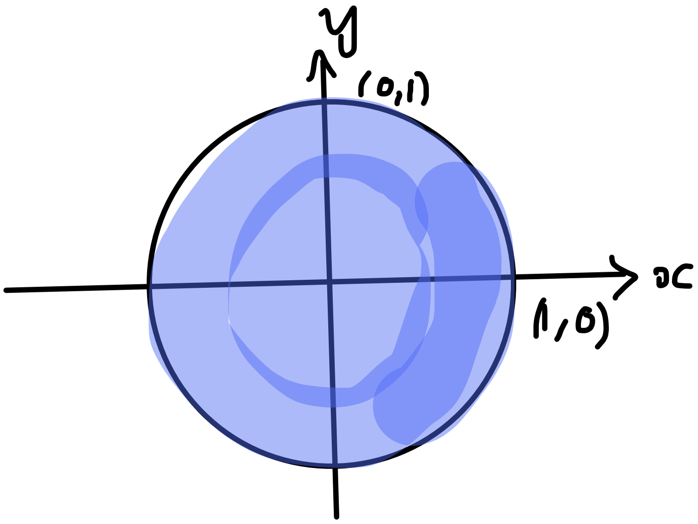
1/ f est la somme de $f_1 \; (x,y) \mapsto xy^2 - y^3$

$f_2 \; (x,y) \mapsto \ln(1 - x^2 - y^2)$

f_1 est un polynôme $\Rightarrow D_{f_1} = \mathbb{R}^2$

f_2 est la composition de $\ln$ et $g(x,y) = 1 - x^2 - y^2$

$\Rightarrow D_{f_2} = \{ 1 - x^2 - y^2 \geq 0 \} = \{ x^2 + y^2 \leq 1 \}$ = disque de centre $(0,0)$ de rayon 1



$D_f = D_{f_1} \cap D_{f_2} = D_{f_2} = \{ x^2 + y^2 \leq 1 \}$

2/ Calculatoire

$\frac{\partial}{\partial x}$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\log(-x^2 - y^2 + 1) + x y^2 - y^3) = y^2 - \frac{2x}{-x^2 - y^2 + 1}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(\log(-x^2 - y^2 + 1) + x y^2 - y^3) = y\left(-\frac{2}{-x^2 - y^2 + 1} + 2x - 3y\right)$$

3/ Calculatoire

$$\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x} f\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(y^2 - \frac{2x}{1 - x^2 - y^2}\right) = y\left(2 - \frac{4x}{(-x^2 - y^2 + 1)^2}\right)$$

Exercice 1

On considère les fonctions $\gamma_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $\gamma_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies par

$$\begin{aligned} \gamma_1(t) &= 1 - t^2 \\ \gamma_2(t) &= \frac{1}{4}t^3 - 3t \end{aligned}$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$, et l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = x - y + 1.$$

1. Etudier les variations de γ_1 et γ_2 sur l'intervalle $[0, +\infty[$;
2. La fonction $\gamma_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est-elle bijective ? Déterminer un intervalle maximal I sur lequel elle est bijective et déterminer sa réciproque ;

Q 1

Pour γ_1, $\gamma_1(1) = \gamma_1(-1) = 0$

$$\lim_{t\to\infty} \gamma_1(t) = \lim_{t\to-\infty} \gamma_1(t) = -\infty$$

$\gamma_1'(t) = -2t$ $\quad \gamma_1'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0$

	$-\infty$		0		∞
γ_1			1		
γ_1'		$+$	0	$-$	
		$\nearrow$	$\rightarrow$	$\searrow$	

Pour γ_2 $\quad \gamma_2(t) = 0 \Leftrightarrow t\,(t^2/4 - 3) = 0$

$\Leftrightarrow t = 0,\ t = \pm 2\sqrt{3}$

$$\lim_{t\to+\infty} \gamma_2(t) = +\infty$$

$\gamma_2'(t) = 3t^2/4 - 3 = 3(t^2/4 - 1) = 0$

$\Rightarrow \gamma_2'(t) = 0 \Leftrightarrow t^2/4 - 1 = 0$

$\Rightarrow t = \pm 2$

	0	2	$2\sqrt{3}$	$+\infty$
γ_2	0	-4	0	$+\infty$
γ_2'	-1	0	6	
	$\searrow$	$\rightarrow$	$\nearrow$	

Q2 D'après l'étude de variation
γ_1 est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^+$
$\Rightarrow \gamma_1$ injective $\Rightarrow$ bijective
Pour son inverse considère

$$y = 1-t^2 \Leftrightarrow t^2 = 1-y$$
$$\underset{t\geq 0}{\Rightarrow} t = |1-y|^{1/2}$$

3. Représenter le graphe de f en restriction au domaine

$$R = [-1,1]^2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$$

de $\mathbb{R}^2$.

4. Les composées $\gamma_1 \circ \gamma_2$, $f \circ \gamma_1$ et $\gamma_1 \circ f$ sont-elles définies ? si oui les calculer.

Q4 $\gamma_1 \circ \gamma_2$ définie car $\operatorname{Im}\gamma_2 \subset \mathbb{R} = D_{\gamma_1}$
$f \circ \gamma_1$ pas définie $\operatorname{Im}\gamma_1 \not\subset \mathbb{R}^2 = D_f$
$\gamma_1 \circ f$ définie car $\operatorname{Im} f \subset D_{\gamma_1}$

2. Donner le vecteur vitesse $\gamma'(t)$ de γ au point $\gamma(t)$;
3. Montrer que γ possède une tangente verticale au point $\gamma(0)$, et une tangente horizontale en $\gamma(2)$.
4. Déterminer la droite tangente à γ en $\gamma(2\sqrt{3})$;

Q2

$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1'(t) \\ \gamma_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2t \\ 3(t^2/4 - 1) \end{pmatrix}$$

Q3 la tangente est verticale

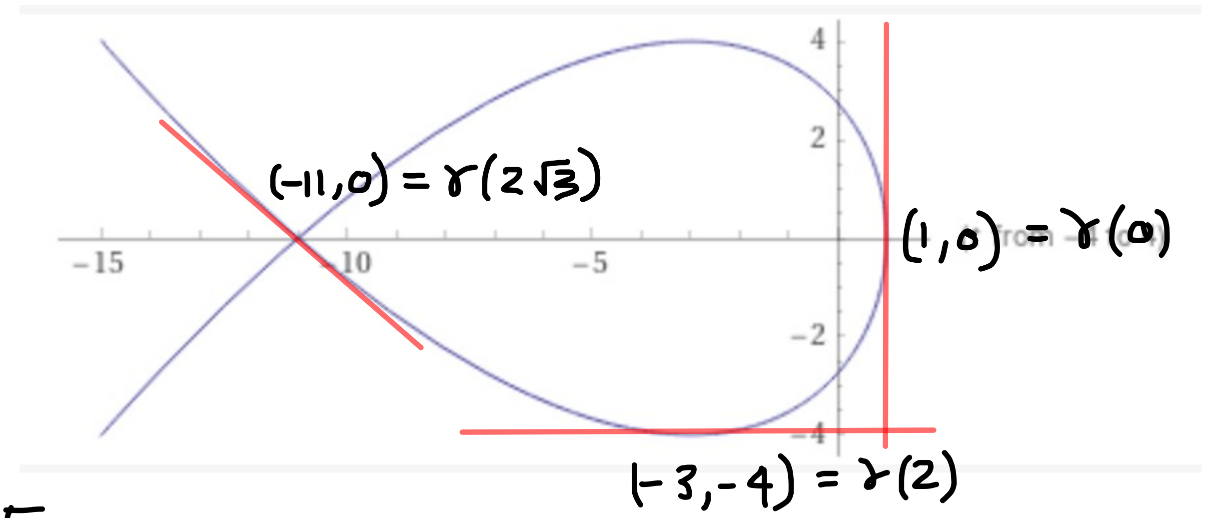
vecteur vitesse est vertical $\Leftrightarrow \gamma_1'(t) = 0$

$\Leftrightarrow t = 0$

Q4 Remplacer $t = 2\sqrt{3}$ dans $\gamma'(t)$

$\gamma'(2\sqrt{3}) = \begin{pmatrix} -4\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ tangente horizontale

5. Tracer l'image de l'intervalle $[0, +\infty[$ par l'application γ, en plaçant les tangentes aux points $\gamma(0)$, $\gamma(2)$, $\gamma(2\sqrt{3})$;
6. En remarquant que pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a $\gamma(-t) = (\gamma_1(t), -\gamma_2(t))$, expliquer comment compléter le tracé de la courbe amorcée à la question précédente pour obtenir l'image de $\mathbb{R}$ tout entier par l'application γ.



Q5