Controle continu 1
Durée : 1h30

Documents et appareils electroniques (dont telephones portables et calculatrices) interdits. Toutes les réponses doivent être justifiées.

Exercice 1

On considère les fonctions $\gamma_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $\gamma_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies par

$$\begin{aligned} \gamma_1(t) &= 1 - t^2 \\ \gamma_2(t) &= \frac{1}{4}t^3 - 3t \end{aligned}$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$, et l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = x - y + 1.$$

I

1. Etudier les variations de γ_1 et γ_2 sur l'intervalle $[0, +\infty[$;
2. La fonction $\gamma_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est-elle bijective ? Déterminer un intervalle maximal I sur lequel elle est bijective et déterminer sa réciproque ;
3. Représenter le graphe de f en restriction au domaine
$$R = [-1, 1]^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$$
de $\mathbb{R}^2$.
4. Les composées $\gamma_1 \circ \gamma_2$, $f \circ \gamma_1$ et $\gamma_1 \circ f$ sont-elles définies ? si oui les calculer.

II

On considère désormais la courbe paramétrée $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ donnée par $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$.

1. Déterminer la composée $f \circ \gamma$;
2. Donner le vecteur vitesse $\gamma'(t)$ de γ au point $\gamma(t)$;
3. Montrer que γ possède une tangente verticale au point $\gamma(0)$, et une tangente horizontale en $\gamma(2)$.
4. Déterminer la droite tangente à γ en $\gamma(2\sqrt{3})$;

5. Tracer l'image de l'intervalle $[0, +\infty[$ par l'application γ, en plaçant les tangentes aux points $\gamma(0)$, $\gamma(2)$, $\gamma(2\sqrt{3})$;
6. En remarquant que pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a $\gamma(-t) = (\gamma_1(t), -\gamma_2(t))$, expliquer comment compléter le tracé de la courbe amorcée à la question précédente pour obtenir l'image de $\mathbb{R}$ tout entier par l'application γ.

Exercice 2

On considère l'expression $f(x, y) = xy^2 - y^3 + \ln(1 - x^2 - y^2)$.

1. Déterminer l'ensemble D_f des $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $f(x, y)$ est bien définie, et le représenter graphiquement.
2. Calculer les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$;
3. Calculer
   (a) $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y)$;
   (b) $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y)$;