Quick Test 2

NOM :
Prénom :

Exercice 1

Soit le plan P d'équation cartésienne $2x - y + z = 1$ et le point $M = (2, 1, -3)$.

1. Trouver l'équation paramétrique de la droite D passant par le point M et orthogonale au plan P.
2. Déterminer la projection orthogonale du point M sur le plan P.

Le vecteur directeur de la droite D est le vecteur normal au plan P

$$\vec{n} = (2, -1, 1)$$

et le point $M = (2, 1, -3)$ est sur D donc l'équation paramétrique de la droite D est :

$$O\vec{M} + t\vec{n} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+2t \\ 1-t \\ -3+t \end{pmatrix}$$

où $t \in \mathbb{R}$.

La projection orthogonale du point M sur le plan P est l'intesection de la droite D et le plan P. On remplace les coordonnées de la droite D dans l'équation du plan P :

$$\begin{array}{rcl} 2(2+2t) - (1-t) + (-3+t) & = & 1 \\ 4 + 4t - 1 + t - 3 + t & = & 1 \\ 6t & = & 1 \\ t & = & \dfrac{1}{6} \end{array}$$

Donc la projection orthogonale du point M sur le plan P est le point

$$O\vec{M} + \frac{1}{6}\vec{n} = (2 + 2 \times \frac{1}{6}, 1 - \frac{1}{6}, -3 + \frac{1}{6}) = (2\frac{1}{3}, \frac{5}{6}, -\frac{17}{6})$$

Exercice 2

Déterminer l'intersection des droites D_1 et D_2 :

$$\begin{array}{rcl} D_1 & = & \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 5x + 8y + 1 = 0\}, \\ D_2 & = & \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 2x + 3y - 1 = 0\} \end{array}$$

Solution :
On résout le système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{aligned} 5x + 8y &= -1, && (1) \\ 2x + 3y &= 1. && (2) \end{aligned}$$

On multiplie (2) par 8 et (1) par 3, on obtient :

$$\begin{aligned} 15x + 24y &= -3, \\ 16x + 24y &= 8. \end{aligned}$$

On soustrait (3) de (4) et on trouve $x = 11$. En remplaçant x dans (1), on trouve $y = -7$. Donc l'intersection des droites D_1 et D_2 est le point $I(11, -7)$.

Exercice 3

Calculer l'aire du triangle ABC.

$$A = (3, 5), B = (2, 3), C = (0, 0)$$

Solution : l'aire du triangle ABC est $\frac{1}{2} \times \left| \det \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2}$.

Exercice 4

Calculer le determinant des matrices suivantes.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 8 & 13 & 21 \end{pmatrix}$$

Solution :

$$\det A = 2, \quad \det B = -4, \quad \det C = 0$$