Quick Test 1

NOM Prénom :
GitHub Copilot .

Exo 1 : forme algébrique

Mettre les expressions suivantes sous forme algébrique :

1. $$\frac{3+4i}{1-2i} = \frac{(3+4i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = \frac{3+10i-8}{1+4} = \frac{-5+10i}{5} = -1+2i$$

2. $$(2+i)^2 + \mathrm{Re}\,(3+4i) = (2+i)(2+i) + 3 = 4 + 4i + i^2 + 3 = 6 + 4i$$

3. $$\frac{1+i}{1-i} + \frac{1-i}{1+i} = \frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)} + \frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)} = \frac{1+2i+i^2}{1-i^2} + \frac{1-2i+i^2}{1-i^2} = \frac{2i}{2} + \frac{-2i}{2} = 0$$

4. $$\frac{a+ib}{a-ib} = \frac{(a+ib)(a+ib)}{(a-ib)(a+ib)} = \frac{a^2+2iab+i^2b^2}{a^2+b^2} = \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} + i\frac{2ab}{a^2+b^2}$$

Exo 2 : forme exponentielle

Mettre les expressions suivantes sous forme exponentielle :

1. $$Z = (\sqrt{3}+i)^6 = (2\exp(i\frac{\pi}{6}))^6 = 64\exp(i\pi)$$

2. $$Z = \frac{1+i}{(1-i)^4} = \frac{\sqrt{2}\exp(i\frac{\pi}{4})}{(\sqrt{2}\exp(-i\frac{\pi}{4}))^4} = \frac{\sqrt{2}\exp(i\frac{\pi}{4})}{4\exp(-i\pi)} = \frac{\sqrt{2}}{4}\exp(i\frac{5\pi}{4})$$

3. $$Z = \frac{\exp(i\frac{\pi}{6}) \times \exp(-i\frac{\pi}{3})}{\exp(i\frac{\pi}{4})} = \exp(i(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4})) = \exp(i(-\frac{7\pi}{12})) = \exp(i(\frac{17\pi}{12}))$$

4. $$Z = \frac{\left(\exp(i\frac{\pi}{3})\right)^5}{\left(\exp(-i\frac{\pi}{2})\right)^7} = \frac{\exp(i\frac{5\pi}{3})}{\exp(i\frac{7\pi}{2})} = \exp(i(\frac{5\pi}{3} - \frac{7\pi}{2})) = \exp(i(-\frac{11\pi}{6})) = \exp(i(\frac{\pi}{6}))$$

Exo 3

Résoudre les équations :

1. $X^2 - 4iX - 8 = 0$
   Le discriminant est $\Delta = (-4i)^2 - 4 \times 1 \times (-8) = -16 + 32 = 16$.
   Donc les solutions sont :

$$X_1 = \frac{4i \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{4i \pm 4}{2} = 2i \pm 2$$

2. Résoudre à la fois : $X^2 = -5 - 12i \quad \text{et} \quad X^2 = -5 + 12i$
   - Pour la première équation, on écrit $X = x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$. On a donc :

     $$X^2 = (x + iy)^2 = x^2 + 2ixy + i^2y^2 = (x^2 - y^2) + i(2xy) = -5 - 12i$$

     En identifiant les parties réelles et imaginaires, on obtient le système :

     $$\begin{cases} x^2 - y^2 = -5 \\ 2xy = -12 \end{cases}$$

     On a également:

     $$x^2 + y^2 = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13.$$

     Considérons le système suivant :

     $$\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ x^2 - y^2 = -5 \end{cases}$$

     En additionnant les deux équations, on trouve $2x^2 = 8$, donc $x^2 = 4$ et $x = \pm 2$ et $2y^2 = 18$, donc $y^2 = 9$ et $y = \pm 3$. Si $x = 2$, alors $2y = -12$ donc $y = -3$ et les solutions sont $\pm(2 - 3i)$.
   - Pour la deuxième équation, on remarque que $-5 + 12i$ est le conjugué de $-5 - 12i$. Donc les solutions sont les conjuguées des solutions précédentes, soit $\pm(2 + 3i)$. n