Résolution de l'équation $Z^2 = 1 + i$ via deux méthodes : forme algébrique et forme exponentielle.

1. Forme exponentielle : L'équation donnée est $Z^2 = 1 + i$.

- **Étape 1 : Conversion de $1 + i$ en forme exponentielle**.

La forme exponentielle d'un nombre complexe est donnée par :

$$z = r \cdot e^{i\theta}$$

où r est le module et θ est l'argument.

Pour $1 + i$, on calcule le module :

$$r = |1 + i| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

L'argument θ est l'angle que fait le nombre complexe avec l'axe réel. Pour $1 + i$, il est dans le premier quadrant et on a :

$$\theta = \arg(1 + i) = \frac{\pi}{4}$$

Ainsi, $1 + i$ en forme exponentielle est :

$$1 + i = \sqrt{2} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}}$$

- **Étape 2 : Résolution de $Z^2 = \sqrt{2} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}}$**

Nous cherchons Z tel que $Z^2 = r \cdot e^{i\theta}$. En prenant la racine carrée des deux côtés, on obtient :

$$Z = \sqrt{\sqrt{2}} \cdot e^{i\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{2}}$$

Cela donne :

$$Z = 2^{1/4} \cdot e^{i\frac{\pi}{8}+k\pi}$$

où $k = 0, 1$ pour les deux solutions principales.

- Pour $k = 0$:

$$Z_1 = 2^{1/4} \cdot e^{i\frac{\pi}{8}}$$

- Pour $k = 1$:

$$Z_2 = 2^{1/4} \cdot e^{i\frac{9\pi}{8}}$$

2. Forme algébrique : L'équation est toujours $Z^2 = 1 + i$. Supposons que $Z = x + iy$ (forme algébrique), où x et y sont réels.

- **Étape 1 : Développement de Z^2**.

Nous avons :

$$Z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$$

Cela doit être égal à $1 + i$. En identifiant la partie réelle et la partie imaginaire, on obtient deux équations :

- Partie réelle :
$$x^2 - y^2 = 1$$
- Partie imaginaire :
$$2xy = 1$$
- **Étape 2 : Résolution du système**.

De $2xy = 1$, on trouve :

$$xy = \frac{1}{2}$$

Remplaçons y par $\frac{1}{2x}$ dans la première équation :

$$x^2 - \left(\frac{1}{2x}\right)^2 = 1$$

Cela donne :

$$x^4 - 1 = \frac{1}{4x^2}$$

En multipliant par $4x^2$ de chaque côté :

$$4x^6 - 4x^2 = 1$$

qui est une équation en x^2. Posons $u = x^2$, on obtient :

$$4u^3 - 4u - 1 = 0$$

Cette équation doit être résolue numériquement ou à l'aide de méthodes algébriques spécifiques. Les solutions de ce système donneraient les valeurs de x et y, puis les deux solutions pour Z.

Conclusion :

- La forme exponentielle permet d'obtenir les solutions $Z_1 = 2^{1/4} \cdot e^{i\frac{\pi}{8}}$ et $Z_2 = 2^{1/4} \cdot e^{i\frac{9\pi}{8}}$.
- En forme algébrique, la résolution d'un système d'équations différentielles donne les solutions pour x et y.