Partiel - 21 octobre 2024 (durée : 1h30)

Documents autorisés : une feuille A4 manuscrite recto-verso. Aucun appareil électronique.
Vous apporterez le plus grand soin à la rédaction et à la présentation. La notation en tiendra compte.

Exercice 1 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $3z^2 - (2-5i)\,z + 1 + 3i = 0$

INDICATION : $\sqrt{33^2 + 56^2} = 65$

Nous avons affaire à une équation polynomiale de degré 2. On va la résoudre en calculant son discriminant Δ, dont on cherchera ensuite une racine δ ($\delta \in \mathbb{C}$ tel que $\delta^2 = \Delta$). Les deux solutions de l'équation seront alors finalement $z_1 = \frac{2-5i-\delta}{6}$ et $z_2 = \frac{2-5i+\delta}{6}$.

On a ici : $\Delta = (2-5i)^2 - 4(3)(1+3i) = 4 - 20i - 25 - 12 - 36i = -33 - 56i$. Notons maintenant $\delta = \alpha + i\beta$. L'égalité $\delta^2 = \Delta$ implique $\alpha^2 - \beta^2 = -33$ (égalité des parties réelles) et $2\alpha\beta = -56 < 0$ (égalité des parties imaginaires). De plus, on a égalité des modules $|\delta|^2 = |\Delta|$, c'est-à-dire $\alpha^2 + \beta^2 = \sqrt{33^2 + 56^2} = 65$. On a donc le système :

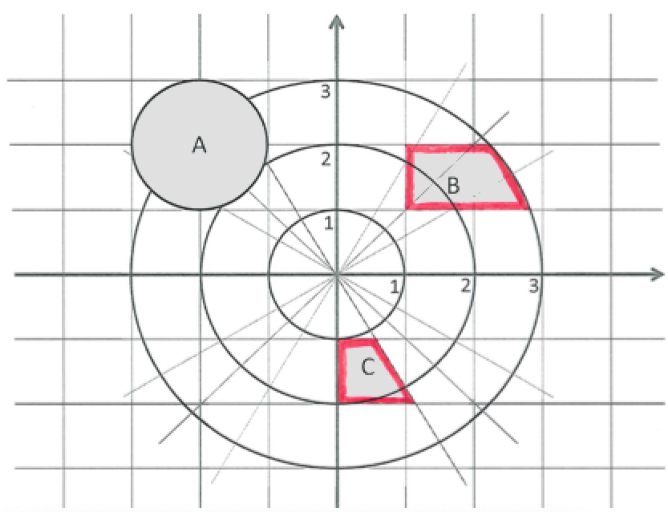
$$\begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 = -33 & (1) \\ \alpha^2 + \beta^2 = 65 & (2) \\ \alpha\beta < 0 & (3) \end{cases}$$

En faisant $(1)+(2)$, puis $(2)-(1)$, on en déduit $\alpha^2 = 16$ et $\beta^2 = 49$, soit $\alpha = \pm 4$ et $\beta = \pm 7$.
D'après (3), α et β sont de signes opposés. D'où $\delta = 4 - 7i$ (ou son opposé).
Les 2 racines du polynôme sont donc :

$$z_1 = \frac{2-5i-4+7i}{6} = \frac{-1+i}{3} \qquad \text{et} \qquad z_2 = \frac{2-5i+4-7i}{6} = 1-2i$$

Exercice 2

Par quelle(s) condition(s) sur leurs affixes peut-on caractériser les points de chacune des trois zones A, B et C du dessin ci-contre ? (donner quelques lignes d'explications).



La zone **A** est un disque de centre $(-2,2)$ et de rayon 1. En notant $z_A = -2+2i$, la condition d'appartenance est donc $|z - z_A| \leq 1$.

La zone **B** correspond à des points d'abscisses supérieures à 1, d'ordonnées comprises entre 1 et 2, et qui sont à l'intérieur du disque de rayon 3 et de centre $(0, 0)$. Les conditions sur les affixes sont donc :

$$\mathcal{R}e(z) \geq 1 \qquad \text{et} \qquad 1 \leq \mathcal{I}m(z) \leq 2 \qquad \text{et} \qquad |z| \leq 3$$

La zone **C** correspond à des points d'ordonnées comprises entre -1 et -2, et situé dans le secteur angulaire entre $-\pi/2$ et $-\pi/3$. Les conditions sur les affixes sont donc :

$$-2 \leq \mathcal{I}m(z) \leq -1 \qquad \text{et} \qquad -\frac{\pi}{2} \leq \arg z \leq -\frac{\pi}{3}$$

<u>REMARQUE</u> on ne peut pas voir évidemment sur le dessin si l'on considère que les frontières font partie ou non des domaines. On peut donc écrire les inégalités de façon stricte $(<, >)$ ou non $(\leq, \geq)$.

Exercice 3 Soit $z = \sqrt{3} + i$

1. Quelle est l'écriture sous forme exponentielle de z ?

Ecrivons z sous forme exponentielle : $z = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 2\, e^{i\pi/6}$.

2. Comment choisir l'entier naturel n pour que z^n soit réel ?

On déduit de la question précédente que $z^n = 2^n\, e^{in\pi/6} = 2^n \left(\cos\frac{n\pi}{6} + i\,\sin\frac{n\pi}{6}\right)$.

z^n sera réel si et seulement sa partie imaginaire est nulle, c'est-à-dire $\sin\left(\frac{n\pi}{6}\right) = 0$. Or $\sin x = 0$ si et seulement si x est un multiple de π, donc $\sin\left(\frac{n\pi}{6}\right) = 0$ si et seulement si n est multiple de 6. Ecrit de façon mathématique : $\mathcal{I}m(z^n) = 0 \iff (n = 6p,\ p \in \mathbb{Z})$.

3. Comment choisir l'entier naturel n pour que z^n soit imaginaire pur ?

z^n sera imaginaire pur si et seulement sa partie réelle est nulle, c'est-à-dire $\cos\left(\frac{n\pi}{6}\right) = 0$. Or $\cos x = 0$ si et seulement si x est égal à $\frac{\pi}{2}$ à un multiple de π près $(x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z})$, donc $\cos\left(\frac{n\pi}{6}\right) = 0$ si et seulement si n est de la forme $6k + 3$ (multiple impair de 3). Ecrit de façon mathématique : $\mathcal{R}e(z^n) = 0 \iff (n = 6p + 3,\ p \in \mathbb{Z})$.

Exercice 4

1.a. Calculer le produit $P_n = \prod_{j=1}^{n} \frac{2j-1}{2j+1}$ pour $n \geq 1$.

Il s'agit d'un produit téléscopique :

$$P_n = \prod_{j=1}^{n} \frac{2j-1}{2j+1} = \frac{1}{3}\frac{3}{5}\frac{5}{7}\cdots\frac{2n-3}{2n-1}\frac{2n-1}{2n+1}$$

Les termes se simplifient tous 2 à 2, sauf le premier numérateur et le dernier dénominateur. D'où finalement $P_n = \dfrac{1}{2n+1}$.

1.b. Calculer la somme $S_n = \sum_{j=1}^{n} (\ln(2j+1) - \ln(2j-1))$ pour $n \geq 1$.

<u>Méthode 1</u> Il s'agit d'une somme téléscopique :

$S_n = (\ln 3 - \ln 1) + (\ln 5 - \ln 3) + (\ln 7 - \ln 5) + \cdots + (\ln(2n-1) - \ln(2n-3)) + (\ln(2n+1) - \ln(2n-1))$

Les termes se simplifient tous 2 à 2, sauf un terme au début et un terme à la fin. Finalement :

$$S_n = -\ln 1 + \ln(2n+1) = \ln(2n+1)$$

<u>Méthode 2</u> En utilisant les propriétés du logarithme ($\ln a - \ln b = \ln(a/b)$ et $\ln a + \ln b = \ln(ab)$), on a donc :

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{j=1}^{n} (\ln(2j+1) - \ln(2j-1)) = -\sum_{j=1}^{n} (\ln(2j-1) - \ln(2j+1)) \\ &= -\sum_{j=1}^{n} \ln \frac{2j-1}{2j+1} = -\ln\left(\prod_{j=1}^{n} \frac{2j-1}{2j+1}\right) = -\ln P_n \end{aligned}$$

2.a. Rappeler la valeur de la somme $1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1}$.

Il s'agit de la somme des premiers termes d'une suite géométrique. En appliquant la formule de sommation, on a donc

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1} = \frac{1-x^n}{1-x}$$

<u>remarque</u> On a supposé implicitement ci-dessus que $x \neq 1$. Pour $x = 1$, la somme vaut évidemment $1 + 1^1 + 1^2 + \ldots + 1^{n-1} = 1 + 1 + 1 + \ldots + 1 = n$.

2.b. En remplaçant x par $\dfrac{b}{a}$, en déduire une factorisation de $a^n - b^n$, où a et b sont des réels quelconques (mais vérifiant $a \neq 0$ et $a \neq b$).

En faisant $x = \dfrac{b}{a}$ dans la formule précédente, on obtient :

$$1 + \frac{b}{a} + \frac{b^2}{a^2} + \ldots + \frac{b^{n-1}}{a^{n-1}} = \frac{1 - \frac{b^n}{a^n}}{1 - \frac{b}{a}} \qquad (E)$$

Or, on a d'une part : $\dfrac{1-\frac{b^n}{a^n}}{1-\frac{b}{a}} = \dfrac{\frac{a^n}{a^n}\left(1-\frac{b^n}{a^n}\right)}{\frac{a}{a}\left(1-\frac{b}{a}\right)} = \dfrac{a}{a^n}\,\dfrac{a^n-b^n}{a-b} = \dfrac{1}{a^{n-1}}\,\dfrac{a^n-b^n}{a-b}$

Et d'autre part : $1+\dfrac{b}{a}+\dfrac{b^2}{a^2}+\ldots+\dfrac{b^{n-1}}{a^{n-1}} = \dfrac{a^{n-1}+a^{n-2}\,b+a^{n-3}\,b^2+\ldots+b^{n-1}}{a^{n-1}}$

L'équation (E) devient donc :

$$\frac{a^{n-1}+a^{n-2}\,b+a^{n-3}\,b^2+\ldots+b^{n-1}}{a^{n-1}} = \frac{1}{a^{n-1}}\,\frac{a^n-b^n}{a-b}$$

c'est-à-dire, en simplifiant par a^{n-1} : $\quad a^n-b^n = (a-b)\left(a^{n-1}+a^{n-2}\,b+a^{n-3}\,b^2+\ldots+b^{n-1}\right)$

On vient donc de démontrer la FORMULE DE BERNOULLI.

$\boxed{\textbf{Exercice 5}}$ Soit $Z=\sqrt{3}+1+i(\sqrt{3}-1)$.

1. Calculer $(1+i)\,Z$ et mettre le résultat sous forme exponentielle.

$$\begin{aligned}(1+i)\,Z &= (1+i)\,\left(\sqrt{3}+1+i(\sqrt{3}-1)\right) = \sqrt{3}+1+i(\sqrt{3}+1)+i(\sqrt{3}-1)+i^2(\sqrt{3}-1)\\ &= 2+i\,2\sqrt{3} = 4\left(\frac{1}{2}+i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 4\,e^{i\pi/3}\end{aligned}$$

2. En déduire l'écriture exponentielle de Z. Combien valent $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12}$?

On remarque par ailleurs que $1+i=\sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}+i\,\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt{2}\,e^{i\pi/4}$.

On a donc : $(1+i)\,Z=\sqrt{2}\,e^{i\pi/4}\,Z=4\,e^{i\pi/3}$.

D'où $Z=\dfrac{4}{\sqrt{2}}\,\dfrac{e^{i\pi/3}}{e^{i\pi/4}}=2\sqrt{2}\;e^{i\pi/3-i\pi/4}=2\sqrt{2}\;e^{i\pi/12}$.

On en déduit finalement :

$$Z=\sqrt{3}+1+i(\sqrt{3}-1)=2\sqrt{2}\;e^{i\pi/12}=2\sqrt{2}\;\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\,\sin\frac{\pi}{12}\right)$$

D'où les valeurs demandées, en identifiant les parties réelles et les parties imaginaires :

$$\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}\qquad\text{et}\qquad\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$

$\boxed{\textbf{Exercice 6}}$ Soit x un réel fixé. Le but de cet exercice est de calculer les sommes

$$C_n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos kx\qquad\text{et}\qquad S_n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sin kx$$

1. Calculer C_0, C_1, S_0, S_1.

$C_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cos(0\,x) = 1 \times \cos 0 = 1$

$C_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cos(0\,x) + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cos(1\,x) = 1 \times \cos 0 + 1 \times \cos x = 1 + \cos x$

$S_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \sin(0\,x) = 1 \times \sin 0 = 0$

$S_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \sin(0\,x) + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \sin(1\,x) = 1 \times \sin 0 + 1 \times \sin x = \sin x$

2. Montrer que $1 + e^{ix} \ = 2\cos\left(\dfrac{x}{2}\right)\ e^{ix/2}$.

<u>MÉTHODE 1</u> En factorisant par $e^{ix/2}$, on a : $1+e^{ix} \ = e^{ix/2}e^{-ix/2} + e^{ix/2}e^{ix/2} = e^{ix/2}\left(e^{-ix/2} + e^{ix/2}\right)$.
On peut ensuite utiliser directement la formule d'Euler $\cos a = \dfrac{e^{ia} + e^{-ia}}{2}$ avec $a = x/2$, ou simplement passer en forme algébrique :

$$e^{-ix/2} + e^{ix/2} = \underbrace{\cos\left(\frac{-x}{2}\right)}_{=\cos\left(\frac{x}{2}\right)} = \underbrace{+i\sin\left(\frac{-x}{2}\right)}_{=-\sin\left(\frac{x}{2}\right)} + \cos\left(\frac{x}{2}\right) + i\sin\left(\frac{x}{2}\right) = 2\cos\left(\frac{x}{2}\right)$$

D'où le résultat.

<u>MÉTHODE 2</u> Par simple vérification :

$$2\cos\left(\frac{x}{2}\right)\ e^{ix/2} = 2\cos\left(\frac{x}{2}\right)\ \left(\cos\left(\frac{x}{2}\right) + i\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right) = \underbrace{2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}_{1+\cos\left(2\frac{x}{2}\right)} + i\ \underbrace{2\cos\left(\frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{x}{2}\right)}_{\sin\left(2\frac{x}{2}\right)}$$

D'où $\quad 2\cos\left(\dfrac{x}{2}\right)\ e^{ix/2} = 1 + \cos x + i\sin x = 1 + e^{ix}$.

3. Simplifier l'expression de $C_n + iS_n$.

$$\begin{aligned} C_n + iS_n \ &= \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \cos kx \ + \ i\ \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \sin kx \\ &= \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} (\cos kx + i\sin kx) \end{aligned}$$

Or $\cos kx + i\sin kx = e^{ikx} = \left(e^{ix}\right)^k$. On a donc :

$$\begin{aligned} C_n + iS_n \ &= \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \left(e^{ix}\right)^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \left(e^{ix}\right)^k\ 1^{n-k} \\ &= \left(e^{ix} + 1\right)^n \qquad \text{d'après la formule du binôme de Newton} \end{aligned}$$

4. En utilisant la relation de la question 2, en déduire les expressions de C_n et S_n.

En utilisant la relation montrée à la question 2, on a donc :

$$C_n + iS_n = \left(1+e^{ix}\right)^n = \left(e^{ix/2}\, 2\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)^n = 2^n \left(\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)^n \underbrace{e^{inx/2}}_{\cos(nx/2)+i\sin(nx/2)}$$

C_n et S_n sont respectivement les parties réelle et imaginaire. On a donc finalement :

$$C_n = 2^n \cos\left(\frac{nx}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)^n \qquad \text{et} \qquad S_n = 2^n \sin\left(\frac{nx}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)^n$$

5. Est-ce cohérent avec les valeurs calculées à la question 1 ?

Si on utilise les formules démontrées à la question 4 pour $n = 0$ et $n = 1$, et les identités $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\,\cos\alpha$ et $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$, on obtient :

- $C_0 = 2^0 \cos\left(\dfrac{0x}{2}\right)\left(\cos\left(\dfrac{x}{2}\right)\right)^0 = 1\times\cos(0)\times 1 = 1$
- $C_1 = 2^1 \cos\left(\dfrac{x}{2}\right)\left(\cos\left(\dfrac{x}{2}\right)\right)^1 = 2\left(\cos\left(\dfrac{x}{2}\right)\right)^2 = 1+\cos\left(2\,\dfrac{x}{2}\right) = 1+\cos x$
- $S_0 = 2^0 \sin\left(\dfrac{0x}{2}\right)\left(\cos\left(\dfrac{x}{2}\right)\right)^0 = 1\times\sin(0)\times 1 = 0$
- $S_1 = 2^1 \sin\left(\dfrac{x}{2}\right)\left(\cos\left(\dfrac{x}{2}\right)\right)^1 = 2\,\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)\,\cos\left(\dfrac{x}{2}\right) = \sin\left(2\,\dfrac{x}{2}\right) = \sin x$

Ces résultats sont bien cohérents avec ceux trouvés à la question 1.