Corrigé de l'examen du 17 décembre 2024 (durée : 2h)

Exercice 1 *Nombres complexes*

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 = 5 - 12i$ (INDICATION : $13^2 = 169$)

Posons $z = \alpha + i\beta$. On a alors $z^2 = \alpha^2 - \beta^2 + 2i\alpha\beta$. D'où, en identifiant les parties réelles et imaginaires : $\alpha^2 - \beta^2 = 5$ et $\alpha\beta = -6$.
On a aussi $|z|^2 = \alpha^2 + \beta^2 = |z^2| = |5 - 12i| = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13$. D'où le système :

$$\begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 &= 5 & (1) \\ \alpha^2 + \beta^2 &= 13 & (2) \\ \alpha\beta &< 0 & (3) \end{cases}$$

En faisant (1)+(2) et (1)−(2), on déduit : $\alpha^2 = 9$ et $\beta^2 = 4$. D'où $\alpha = \pm 3$ et $\beta = \pm 2$. D'après (3), on sait que α et β sont de signes opposés. D'où finalement les 2 racines $z_1 = 3 - 2i$ et $z_2 = -3 + 2i$.

2. Soient A et B les points du plan d'affixes respectives $z_A = -1 + i$ et $z_B = 1 + 3i$.
Soit un point M d'affixe z.

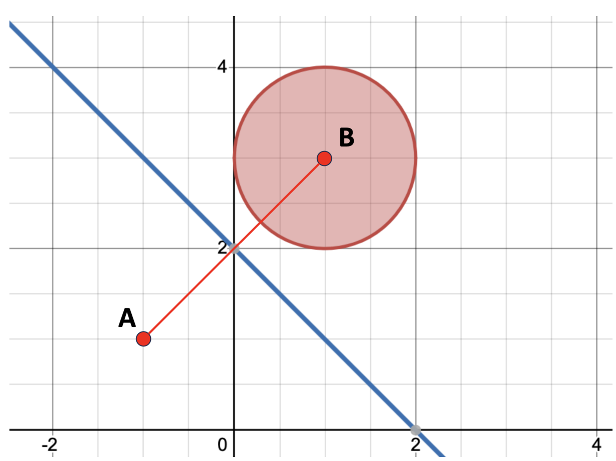
2.a. A quelle(s) condition(s) sur z correspond la propriété : " M appartient à la médiatrice de $[AB]$ "

La médiatrice de $[AB]$ est l'ensemble des points M équidistants de A et B, c'est-à-dire vérifiant $\|\overrightarrow{AM}\| = \|\overrightarrow{BM}\|$, soit avec les affixes : $|z - z_A| = |z - z_B|$, ou encore $|z + 1 - i| = |z - 1 - 3i|$.

2.b. A quelle(s) condition(s) sur z correspond la propriété : " M appartient au disque de centre B et de rayon 1 "

M appartient au disque de centre B et de rayon 1 si et seulement si la distance entre M et B est inférieure ou égale à 1. C'est-à-dire $\|\overrightarrow{BM}\| \leq 1$, soit avec les affixes : $|z - z_B| \leq 1$, ou encore $|z - 1 - 3i| \leq 1$.

2.c. Faire une représentation graphique correspondant à ces deux questions.



$\boxed{\textbf{Exercice 2}}$ Le but de cet exercice est d'étudier la fonction $f(x) = x - \dfrac{\ln x}{x^2}$

1. On considère pour commencer la fonction $u(x) = x^3 - 1 + 2\ln x$.

1.a. Calculer $u(1)$.

$u(1) = 1^3 - 1 + 2\ln(1) = 1 - 1 + 0 = 0$

1.b. Etudier le domaine de définition, les limites aux bornes de ce domaine, et le signe de la dérivée de $u(x)$.
Résumer ces informations dans un tableau de variations.

$u(x)$ est définie si et seulement si $x > 0$, afin que $\ln x$ existe. D'où $\mathcal{D}_u =]0, +\infty[$.

Quand $x \to 0^+$, $x^3 \to 0$ et $\ln x \to -\infty$. Donc $\lim\limits_{x \to 0^+} u(x) = -\infty$

Quand $x \to +\infty$, $x^3 \to +\infty$ et $\ln x \to +\infty$. Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x) = +\infty$

La dérivée est $u'(x) = 3x^2 + \dfrac{2}{x}$ et est donc strictement positive sur $]0, +\infty[$.

En résumé, on a le tableau suivant :

x	0		1		$+\infty$
$u'(x)$		$+$		$+$	
$u(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

1.c. En déduire le signe de $u(x)$ en fonction de x.

On déduit du tableau précédent que

$$u(x) \begin{cases} < 0 & \text{pour } 0 < x < 1 \\ = 0 & \text{pour } x = 1 \\ > 0 & \text{pour } x > 1 \end{cases}$$

2. On va maintenant étudier la fonction $f(x)$ définie précédemment.

2.a. Etudier le domaine de définition, les limites aux bornes de ce domaine, et le signe de la dérivée de $f(x)$. (LES RÉSULTATS DE LA QUESTION 1 SERONT UTILES POUR CE DERNIER POINT)
Résumer ces informations dans un tableau de variations.

Comme pour $u(x)$, $f(x) = x - \dfrac{\ln x}{x^2}$ contient le terme $\ln x$, donc est défini si et seulement si $x > 0$. Donc $\mathcal{D}_f =]0, +\infty[$.

Quand $x \to 0^+$, $x^2 \to 0^+$ et $\ln x \to -\infty$. Donc $\dfrac{\ln x}{x^2} \to -\infty$, donc $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$

Quand $x \to +\infty$, $x^2 \to +\infty$ et $\ln x \to +\infty$. Le terme $\dfrac{\ln x}{x^2}$ a donc une forme indéterminée de type $\frac{\infty}{\infty}$. La règle de croissance comparée s'applique (comparaison d'un logarithme et d'une puissance), et la limite est donc donnée par la fonction puissance : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^2} = 0$. D'où finalement $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

La dérivée est

$$f'(x) = 1 - \frac{\frac{1}{x}x^2 - 2x\ln x}{x^4} = 1 - \frac{1 - 2\ln x}{x^3} = \frac{x^3 - 1 + 2\ln x}{x^3} = \frac{u(x)}{x^3}$$

x^3 étant positif sur $\mathcal{D}_f =]0, +\infty[$, $f'(x)$ est donc de même signe que $u(x)$, qu'on a déterminé à la question 1.

En résumé, on a le tableau suivant (on calcule $f(1) = 1$) :

x	0		1		$+\infty$
$u(x)$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

2.b. Montrer que la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de f. Préciser la position relative de $\mathcal{C}_f$ par rapport à $\mathcal{D}$.

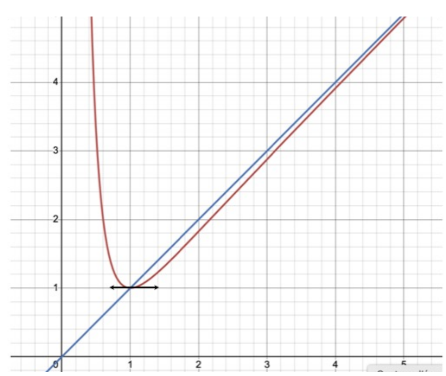
On nous donne ici l'équation de la droite, il n'y a donc pas besoin de la rechercher. Il suffit juste de vérifier qu'il s'agit bien d'une asymptote, c'est-à-dire de prouver que l'"écart entre la courbe $\mathcal{C}_f$ et la droite $\mathcal{D}$ tend vers 0. On a $f(x) - x = -\dfrac{\ln x}{x^2}$ et on a vu que cette quantité tend vers 0 quand $x \to +\infty$ lors du calcul de limites fait précédemment. De plus, $-\dfrac{\ln x}{x^2} < 0$ quand $\ln x > 0$, c'est-à-dire quand $x > 1$. Donc en résumé $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - x = 0^-$. La droite d'équation $y = x$ est donc bien asymptote à la courbe $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$, et est située au-dessus de $\mathcal{C}_f$.

2.c. Tracer <u>avec soin</u> $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{D}$. Pour aider au tracé, on donne $\ln 2 \simeq 0,7$ et $\ln 3 \simeq 1,1$.

On a :

$f(2) = 2 - \frac{\ln 2}{4} \simeq 2 - 0.17 = 1.83$

$f(3) = 3 - \frac{\ln 3}{9} \simeq 3 - 0.12 = 2.88$

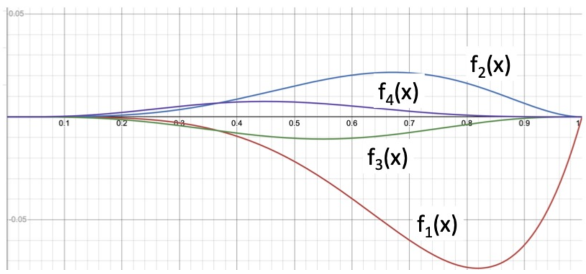


Exercice 3 Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on pose $f_n(x) = x^5 (\ln x)^n$. f_n est ainsi définie sur $]0, +\infty[$.

1. Pourquoi a-t-on $\lim\limits_{x \to 0^+} f_n(x) = 0$?

Quand $x \to 0^+$, $x^5 \to 0^+$ et $(\ln x)^n \to \pm\infty$ (suivant si n est pair ou impair). On a donc une forme indéterminée de type "$0 \times \infty$". La règle de croissance comparée permet de conclure que la puissance x^5 l'emporte, donc $\lim\limits_{x \to 0^+} f_n(x) = 0$.

On peut donc prolonger f_n par continuité en $x = 0$ en posant $f_n(0) = 0$. f_n est désormais définie sur $[0, +\infty[$. Par exemple, f_1, f_2, f_3 et f_4 sont tracées sur $[0, 1]$ dans la figure suivante.



On pose maintenant $J_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 x^5 (\ln x)^n\,dx$ pour tout $n \geq 1$.

2. Calculer $J_1 = \displaystyle\int_0^1 x^5 \ln x\,dx$.

On va faire une intégration par parties, en posant $u'(x) = x^5$ et $v(x) = \ln x$. On a donc $u(x) = \dfrac{x^6}{6}$ et $v'(x) = \dfrac{1}{x}$. D'où :

$$
\begin{aligned}
J_1 = \int_0^1 f_1(x)\,dx = \int_0^1 x^5 \ln x\,dx &= \left[\frac{x^6}{6} \ln x\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{x}\frac{x^6}{6}\,dx \\
&= \left[\frac{x}{6} f_1(x)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^5}{6}\,dx \\
&= 0 - 0 - \frac{1}{6}\left[\frac{x^6}{6}\right]_0^1 = -\frac{1}{36}
\end{aligned}
$$

3. Montrer que $J_n = -\dfrac{n}{6} J_{n-1}$ pour tout $n \geq 2$.

(ON POURRA UTILISER UNE INTÉGRATION PAR PARTIES)

On va faire à nouveau une intégration par parties, en posant cette fois $u'(x) = x^5$ et $v(x) = (\ln x)^n$. On a donc $u(x) = \dfrac{x^6}{6}$ et $v'(x) = \dfrac{n}{x}(\ln x)^{n-1}$. D'où :

$$
\begin{aligned}
J_n = \int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 x^5 (\ln x)^n\,dx &= \left[\frac{x^6}{6}(\ln x)^n\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{n}{x}\frac{x^6}{6}(\ln x)^{n-1}\,dx \\
&= \left[\frac{x}{6} f_n(x)\right]_0^1 - \frac{n}{6}\int_0^1 x^5 (\ln x)^{n-1}\,dx \\
&= 0 - 0 - \frac{n}{6} J_{n-1} = -\frac{n}{6} J_{n-1}
\end{aligned}
$$

4. En déduire l'expression de J_n en fonction de n.

On a donc :

$$\begin{aligned} J_n &= -\frac{n}{6} J_{n-1} \\ &= \left(-\frac{n}{6}\right)\left(-\frac{n-1}{6}\right) J_{n-2} \\ &= \dots \\ &= \left(-\frac{n}{6}\right)\left(-\frac{n-1}{6}\right) \dots \left(-\frac{2}{6}\right) J_1 \\ &= \frac{(-1)^{n-1}\, n(n-1)\dots 2}{6^{n-1}} J_1 \end{aligned}$$

En utilisant le fait que $J_1 = -\frac{1}{36}$, on a donc finalement : $\quad J_n = \dfrac{(-1)^n\, n!}{6^{n+1}}$

Exercice 4 Dans l'espace $\mathbb{R}^3$, on considère les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ d'équations paramétriques :

$$\mathcal{D} : \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + t \\ y = 2 - 3t \\ z = -1 - t \end{array} \right. , t \in \mathbb{R} \qquad \text{et} \qquad \mathcal{D}' : \left\{ \begin{array}{l} x = 2 + 2s \\ y = -1 - s \\ z = -2 + s \end{array} \right. , s \in \mathbb{R}$$

1. Démontrer que $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont sécantes en un point A dont on déterminera les coordonnées.

Notons (x_A, y_A, z_A) les coordonnées de A. Il existe donc un réel t_A et un réel s_A tels que :

$$\left\{ \begin{array}{ll} x_A = 1 + t_A & = 2 + 2s_A \\ y_A = 2 - 3t_A & = -1 - s_A \\ z_A = -1 - t_A & = -2 + s_A \end{array} \right.$$

En réordonnant, on a donc :

$$\left\{ \begin{array}{ll} t_A - 2s_A & = 1 \\ -3t_A + s_A & = -3 \\ -t_A - s_A & = -1 \end{array} \right.$$

La somme des première et troisième équations donne $s_A = 0$, d'où $t_A = 1$. On peut vérifier a posteriori que les 3 équations sont alors bien satisfaites.
On en déduit immédiatement que $x_A = 2, y_A = -1, z_A = -2$.

$\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont donc bien sécantes au point $A(2, -1, -2)$.

2. Soit $\mathcal{P}$ le plan contenant $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.

2.a. Déterminer un vecteur $\vec{n}$ orthogonal à $\mathcal{P}$.

$\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ étant sous forme paramétrique, leurs équations fournissent un vecteur directeur de chacune :

$$\vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \vec{d'} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Le plan $\mathcal{P}$ est donc engendré par $\vec{d}$ et $\vec{d'}$. Un vecteur orthogonal à $\mathcal{P}$ est alors

$$\vec{n} = \vec{d} \wedge \vec{d'} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

2.b. En déduire une équation cartésienne de $\mathcal{P}$.

Un point $M(x, y, z)$ appartient à $\mathcal{P}$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ est une direction du plan, c'est-à-dire si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ est orthogonal à $\vec{n}$. Ce qui est équivalent à $\overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0$.
Or $\overrightarrow{AM}.\vec{n} = (x-2)(-4) + (y+1)(-3) + (z+2)(5) = -4x - 3y + 5z + 15$.

Une équation cartésienne de $\mathcal{P}$ est donc : $4x + 3y - 5z = 15$

Exercice 5 Les 2 questions sont indépendantes

Dans l'espace $\mathbb{R}^3$, on considère le point $A(-1, 1, 3)$ et la droite $\mathcal{D}$ d'équation paramétrique

$$\mathcal{D} = \{ (-1+t, 1+t, t) , t \in \mathbb{R}\}$$

Le but de cet exercice est de calculer de 2 façons différentes la distance δ entre A et $\mathcal{D}$.

1. *Méthode 1 : géométrie dans* $\mathbb{R}^3$

1.a. Calculer les coordonnées du point H, projection orthogonale de A sur $\mathcal{D}$.

$H(x_H, y_H, z_H)$ est caractérisé par le fait que $H \in \mathcal{D}$ et que $\overrightarrow{AH}$ est orthogonal à $\mathcal{D}$.

— D'après l'équation paramétrique de $\mathcal{D}$, un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ est $\vec{d} = (1, 1, 1)$. Dire que $\overrightarrow{AH}$ est orthogonal à $\mathcal{D}$ revient donc à dire que $\overrightarrow{AH}.\vec{d} = 0$, c'est-à-dire $(x_H + 1) + (y_H - 1) + (z_H - 3) = 0$, soit $x_H + y_H + z_H = 3$.
— $H \in \mathcal{D}$ signifie qu'il existe un réel t_H tel que $(x_H, y_H, z_H) = (-1 + t_H, 1 + t_H, t_H)$.

En réunissant les 2 relations, on a donc : $-1 + t_H + 1 + t_H + t_H = 3$, soit $t_H = 1$.

On en déduit les coordonnées de H : $H(0, 2, 1)$.

1.b. En déduire la valeur de $\delta = \|\overrightarrow{AH}\|$

$\overrightarrow{AH} = (1, 1, -2)$, donc $\delta = \|\overrightarrow{AH}\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{6}$

2. *Méthode 2 : par minimisation*

On va utiliser le fait que δ est le minimum de la distance entre A et un point M parcourant la droite $\mathcal{D}$. On note $M(t) = (-1 + t, 1 + t, t)$.

2.a. Calculer $\|\overrightarrow{AM(t)}\|$. On définit ainsi la fonction $f(t) = \|\overrightarrow{AM(t)}\|^2$. (Attention au carré)

$\overrightarrow{AM(t)} = (-1 + t + 1, 1 + t - 1, t - 3) = (t, t, t - 3)$, d'où $\|\overrightarrow{AM(t)}\| = \sqrt{t^2 + t^2 + (t-3)^2} = \sqrt{3t^2 - 6t + 9}$. On a donc $f(t) = \|\overrightarrow{AM(t)}\|^2 = 3t^2 - 6t + 9$.

2.b. Pour quelle valeur de t la fonction f admet-elle un minimum ?

$f(t)$ est un polynôme du second degré, donc une parabole. Le coefficient de t^2 étant positif,

elle est orientée vers le haut. Elle admet donc un unique minimum. Celui-ci est caractérisé par la condition $f'(t) = 0$ (une condition nécessaire pour qu'une fonction dérivable admette un extremum est que la dérivée soit nulle en ce point).
On a $f'(t) = 6t - 6$. Donc $f'(t) = 0$ pour $t = 1$.

2.c. Quel est ce minimum ? Est-ce cohérent avec le résultat de la question 1 ?

On a vu que $f(t) = \|\overrightarrow{AM(t)}\|^2 = t^2 + t^2 + (t-3)^2 = 3t^2 - 6t + 9$. Pour $t = 1$, on obtient $f(t) = 3 - 6 + 9 = 6$. Or $f(t) = \|\overrightarrow{AM(t)}\|^2$. On a donc : $\|\overrightarrow{AM(t)}\| = \sqrt{6}$. On retrouve bien le résultat obtenu par la méthode 1.

Le point $M(1) = (-1+1, 1+1, 1) = (0, 2, 1)$ correspond bien au point H qu'on avait trouvé.
