

Partiel - 23 octobre 2023 (durée : 1h30)

Documents autorisés : une feuille A4 manuscrite recto-verso. Aucun appareil électronique. Vous apporterez le plus grand soin à la rédaction et à la présentation. La notation en tiendra compte.

Exercice 1 On considère le nombre complexe $z = \frac{a+ib}{c+id}$ où a, b, c, d sont des réels, avec $(c, d) \neq (0, 0)$. A quelle condition sur a, b, c, d a-t-on z réel? A quelle condition sur a, b, c, d a-t-on z imaginaire pur?

Exercice 2

On définit 4 ensembles de points M du plan complexe par les conditions ci-dessous sur leurs affixes z :

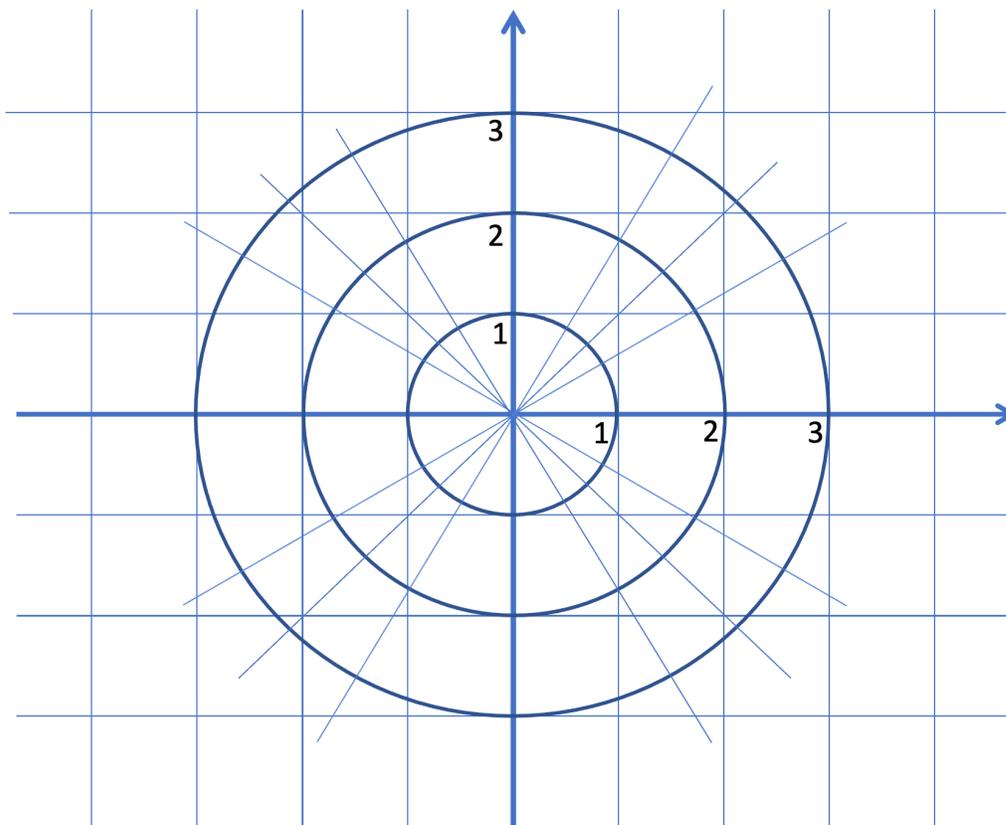
Zone A $1 \leq |z| \leq 3$ et $\frac{2\pi}{3} \leq \arg z \leq \frac{3\pi}{4}$

Zone B $|z| \geq 2$ et $-2 \leq \operatorname{Re}(z) \leq 0$ et $-2 \leq \operatorname{Im}(z) \leq 0$

Zone C $|z| \geq 1$ et $1 \leq \operatorname{Re}(z) \leq 2$ et $\arg z \in \left[-\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{6}\right]$

Zone D $\frac{\pi}{4} \leq \arg z \leq \frac{\pi}{2}$ et $\operatorname{Im}(z) \leq 2$

En donnant quelques lignes d'explications pour chaque cas, hachurer ces 4 zones dans le dessin ci-dessous en indiquant à chaque fois la lettre correspondante.



Exercice 3 Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $2z^2 + (i - 3)z - 1 + 3i = 0$

INDICATION : $\sqrt{16^2 + 30^2} = 34$

Exercice 4 Soit $z = \sqrt{2 + \sqrt{3}} + i\sqrt{2 - \sqrt{3}}$

1. Calculer z^2 , et déterminer son écriture sous forme exponentielle.
2. En déduire une écriture exponentielle de z , et les valeurs de $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$.

Exercice 5

1. Calculer le produit $P_n = \prod_{k=2}^n \frac{k+1}{k-1}$ pour $n \geq 2$.
2. Calculer la somme $S_n = \sum_{k=2}^n (\ln(k+1) - \ln(k-1))$ pour $n \geq 2$.

Exercice 6

Soit $n \geq 2$ un entier naturel fixé, et z un nombre complexe différent de -1 et racine n -ième de -1 , c'est-à-dire que $z^n = -1$.

Calculer $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} z^{2k}$.