Partiel - 10 novembre 2022 (durée : 1h30)

Documents autorisés : une feuille A4 manuscrite recto-verso. Aucun appareil électronique. Apportez le plus grand soin à la rédaction et à la présentation. La notation en tiendra compte.

Exercice 1 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + 2(1+i)\,z - 5(1+2i) = 0$

INDICATION : $\sqrt{20^2 + 48^2} = 52$

Exercice 2

Chacune des zones A et B indiquées dans le dessin-ci-contre est caractérisée par des conditions sur les affixes z des points dans cette zone. Pour chaque zone, indiquer (en justifiant votre réponse) de quelles conditions il s'agit parmi celles ci-dessous :

(C1) $|z| \geq 2$ et $-1 \leq \mathcal{R}e(z) \leq -\frac{1}{2}$

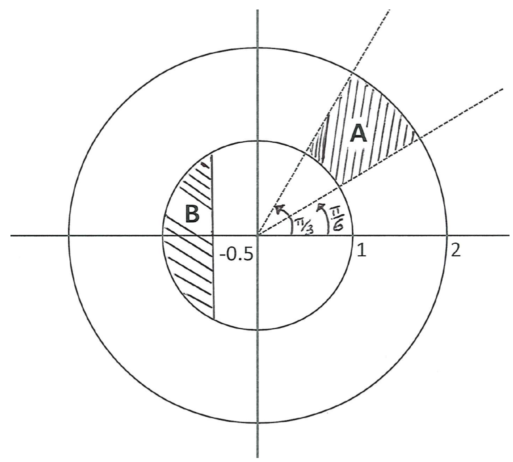
(C2) $\frac{\pi}{6} \leq \arg z \leq \frac{\pi}{3}$ et $\mathcal{I}m(z) \leq 2$

(C3) $1 \leq |z| \leq 2$ et $\frac{\pi}{6} \leq \arg z \leq \frac{\pi}{3}$

(C4) $\mathcal{R}e(z) \leq -\frac{1}{2}$ et $|z| \leq 1$

(C5) $-1 \leq \mathcal{R}e(z) \leq -\frac{1}{2}$ et $-1 \leq \mathcal{I}m(z) \leq 1$

(C6) $\frac{1}{2} \leq \mathcal{R}e(z) \leq 2$ et $\frac{\pi}{6} \leq \arg z \leq \frac{\pi}{3}$



Exercice 3

1. Pour quelle(s) valeur(s) des coordonnées a et b les vecteurs $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}$ sont-ils orthogonaux ? Colinéaires ?

2. Les vecteurs $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ sont-ils coplanaires ?

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$, et $\theta \in [0, \pi]$ l'angle non orienté entre ces vecteurs. On rappelle que $(\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}) = \|\overrightarrow{u}\|\,\|\overrightarrow{v}\|\,\cos\theta$ et que $\|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\| = \|\overrightarrow{u}\|\,\|\overrightarrow{v}\|\,\sin\theta$.

3. Déterminer l'angle entre les vecteurs $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \\ 1-\sqrt{2} \end{pmatrix}$

4. Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Montrer que $\|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\|^2 + (\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v})^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2\,\|\overrightarrow{v}\|^2$

TOURNEZ SVP .../...

Exercice 4

1. Calculer $S_2 = \sum_{k=1}^{2} k\,(k!)$ et $S_3 = \sum_{k=1}^{3} k\,(k!)$

2. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\quad k\,(k!) = (k+1)! - k!$

3. En déduire la valeur de $S_n = \sum_{k=1}^{n} k\,(k!)$ $\quad$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Ce résultat est-il cohérent avec les valeurs de S_2 et S_3 calculées à la question 1 ?

Exercice 5

Simplifier l'expression $\displaystyle\sum_{k=0}^{7} \binom{7}{k} (2i)^{k+1}\,(1-i)^{7-k}$ $\quad$ et mettre le résultat sous forme exponentielle.

Exercice 6 $\quad$ Soit θ un réel fixé et n un entier naturel.

Le but de cet exercice est de calculer les sommes $C_n = \sum_{k=0}^{n} \cos k\theta$ et $S_n = \sum_{k=0}^{n} \sin k\theta$.

1. Quelles sont les valeurs de θ telles que $e^{i\theta} = 1$?

2. Calculer $E_n = \sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta}$ $\qquad$ (on distinguera les deux cas $e^{i\theta} = 1$ et $e^{i\theta} \neq 1$)

3. Montrer que, pour tout α réel, $e^{i\alpha} - 1 = 2i\,e^{i\alpha/2}\,\sin\dfrac{\alpha}{2}$.

En déduire que, si $e^{i\theta} \neq 1$, $E_n = \dfrac{\sin\frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\,e^{in\theta/2}$

4. En déduire les expressions de C_n et S_n (pour les deux cas distingués précédemment).