CC3 - 2025 **Durée : 90m**

Calcul intégral, introduction aux probabilités

Aucun document ni matériel électronique n'est autorisé. Les exercices sont indépendants mais chaque exercice a sa propre cohérence. La qualité de la rédaction sera grandement prise en compte dans la notation.

Exercice 1 : Courbes paramétrées.

1. Déterminer le vecteur vitesse de la courbe paramétrée.
2. Calculer la longueur de l'arc de cette courbe.

Étant donné les équations paramétriques de l'astroïde :

$$x(t) = a\cos^3 t, \quad y(t) = a\sin^3 t, \quad t \in [0, 2\pi]$$

La formule de la longueur d'arc d'une courbe paramétrée est :

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

Calculons les dérivées :

$$\frac{dx}{dt} = -3a\cos^2 t \sin t, \quad \frac{dy}{dt} = 3a\sin^2 t \cos t$$

En remplaçant dans la formule :

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-3a\cos^2 t\sin t)^2 + (3a\sin^2 t\cos t)^2}\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} 3a\sqrt{\cos^4 t\sin^2 t + \sin^4 t\cos^2 t}\, dt$$

$$= 3a\int_0^{2\pi} \sqrt{\cos^2 t\sin^2 t(\cos^2 t + \sin^2 t)}\, dt$$

$$= 3a \int_0^{2\pi} |\cos t \sin t|\, dt$$

Puisque l'intégrande est périodique et symétrique sur $[0, 2\pi]$, on peut calculer sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et multiplier par 4 :

$$L = 4 \cdot 3a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \sin t\, dt = 12a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \sin t\, dt$$

Utilisons l'identité :

$$\cos t \sin t = \frac{1}{2} \sin(2t)$$

$$L = 12a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \sin(2t)\, dt = 6a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2t)\, dt$$

$$= 6a \left[-\frac{1}{2} \cos(2t) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 6a \left(-\frac{1}{2} [\cos \pi - \cos 0] \right)$$

$$= 6a \cdot \left(-\frac{1}{2} [-1 - 1] \right) = 6a$$

Exercice 2 : Intégrales doubles.

$$\iint_A \frac{2xy}{x^2 + y^2}\, dx\, dy$$

—

Changement en coordonnées polaires

L'intégrande contient des expressions de la forme $x^2 + y^2$ et xy, ce qui suggère de passer aux **coordonnées polaires** :

- $x = r \cos \theta$ - $y = r \sin \theta$ - $x^2 + y^2 = r^2$ - Le jacobien du changement donne $dx\, dy = r\, dr\, d\theta$

L'intégrande devient :

$$\frac{2xy}{x^2+y^2} = \frac{2r\cos\theta \cdot r\sin\theta}{r^2} = 2\cos\theta\sin\theta = \sin(2\theta)$$

—

Région entre deux cercles dans le premier quadrant
La région A est :

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 1 \leq \sqrt{x^2+y^2} \leq 2,\ x \geq 0,\ y \geq 0\right\}$$

En coordonnées polaires : - $1 \leq r \leq 2$ - $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ (premier quadrant)
Alors, l'intégrale devient :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_1^2 \sin(2\theta) \cdot r\, dr\, d\theta$$

Étape 1 : intégrer par rapport à r

$$\int_1^2 r\, dr = \left[\frac{1}{2}r^2\right]_1^2 = \frac{1}{2}(4-1) = \frac{3}{2}$$

Étape 2 : intégrer par rapport à θ

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2\theta) \cdot \frac{3}{2}\, d\theta = \frac{3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2\theta)\, d\theta$$

Utilisons une substitution : $u = 2\theta \Rightarrow du = 2\, d\theta \Rightarrow d\theta = \frac{du}{2}$
Quand $\theta = 0 \Rightarrow u = 0$, et quand $\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow u = \pi$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2\theta)\, d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \sin(u)\, du = \frac{1}{2}[-\cos(u)]_0^{\pi} = \frac{1}{2}[-\cos(\pi)+\cos(0)] = \frac{1}{2}(1+1) = 1$$

Donc l'intégrale vaut :

$$\frac{3}{2} \cdot 1 = \boxed{\frac{3}{2}}$$

Cas 2 : Disque de rayon 1 centré à l'origine

Ici, $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$
En coordonnées polaires : - $0 \leq r \leq 1$ - $0 \leq \theta \leq 2\pi$
L'intégrale devient :

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 \sin(2\theta) \cdot r \, dr \, d\theta$$

Intégrale en r :

$$\int_0^1 r \, dr = \left[\frac{1}{2} r^2\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

Intégrale en θ :

$$\int_0^{2\pi} \sin(2\theta) \cdot \frac{1}{2} \, d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \sin(2\theta) \, d\theta = 0$$

(puisque l'intégrale de $\sin(2\theta)$ sur une période complète est nulle)

$$\boxed{0}$$

Exercice — Changement de variables

Calculer l'intégrale suivante :

$$\iint_R \frac{x + y}{x - y} \, dx \, dy,$$

où R est la région délimitée par les droites :

$$x - y = 1, \quad x - y = 2, \quad x + y = 3, \quad x + y = 5.$$

1. Changement de variables

On pose :

$$u = x - y, \qquad v = x + y \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = \dfrac{u + v}{2} \\ y = \dfrac{v - u}{2} \end{cases}$$

2. Nouvelle région

Les bornes deviennent :

$$1 \leq u \leq 2, \quad 3 \leq v \leq 5.$$

La région R devient un rectangle S dans le plan (u, v).

3. Jacobien

On calcule le jacobien du changement de variables :

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

Donc : $dx\,dy = |J|\,du\,dv = \frac{1}{2}\,du\,dv$

4. Réécriture de l'intégrale

On a :

$$x + y = v, \quad x - y = u \Rightarrow \frac{x+y}{x-y} = \frac{v}{u}$$

Ainsi :

$$\iint_R \frac{x+y}{x-y}\,dx\,dy = \iint_S \frac{v}{u} \cdot \frac{1}{2}\,du\,dv = \frac{1}{2} \int_{u=1}^{2} \int_{v=3}^{5} \frac{v}{u}\,dv\,du$$

$$= \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{1}{u} \left(\int_3^5 v\,dv \right) du = \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{1}{u} \left[\frac{v^2}{2} \right]_3^5 du = \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{1}{u} \cdot \frac{25-9}{2}\,du = \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{8}{u}\,du = 4 \int_1^2 \frac{1}{u}\,du = 4\,l$$

5. Résultat

$$\boxed{\iint_R \frac{x+y}{x-y}\,dx\,dy = 4 \ln 2}$$

Exercice 3 : Stylos à encre bleue

Dans une entreprise de fabrication de stylos, trois machines M1, M2 et M3 produisent respectivement 20%, 50% et 30% du total des stylos. Chaque machine produit un certain pourcentage de stylos **à encre bleue** :

- M1 : 10% des stylos qu'elle produit sont à encre bleue.
- M2 : 6% des stylos qu'elle produit sont à encre bleue.
- M3 : 4% des stylos qu'elle produit sont à encre bleue.

On choisit un stylo au hasard dans la production totale, et il s'avère qu'il contient de l'encre bleue.

Question 1 :

Quelle est la probabilité que ce stylo ait été produit par la machine M1 ? par M2 ? par M3 ?

Solution :

Données :

$$P(M_1) = 0{,}20 \quad P(M_2) = 0{,}50 \quad P(M_3) = 0{,}30$$
$$P(B|M_1) = 0{,}10 \quad P(B|M_2) = 0{,}06 \quad P(B|M_3) = 0{,}04$$

Étape 1 : Probabilité totale d'obtenir un stylo à encre bleue :

$$P(B) = P(M_1)P(B|M_1) + P(M_2)P(B|M_2) + P(M_3)P(B|M_3)$$

$$P(B) = 0{,}20 \times 0{,}10 + 0{,}50 \times 0{,}06 + 0{,}30 \times 0{,}04 = 0{,}02 + 0{,}03 + 0{,}012 = 0{,}062$$

Étape 2 : Application de la formule de Bayes :

$$P(M_i|B) = \frac{P(M_i) \cdot P(B|M_i)}{P(B)}$$

$$P(M_1|B) = \frac{0{,}20 \times 0{,}10}{0{,}062} = \frac{0{,}02}{0{,}062} \approx 0{,}3226$$
$$P(M_2|B) = \frac{0{,}50 \times 0{,}06}{0{,}062} = \frac{0{,}03}{0{,}062} \approx 0{,}4839$$
$$P(M_3|B) = \frac{0{,}30 \times 0{,}04}{0{,}062} = \frac{0{,}012}{0{,}062} \approx 0{,}1935$$

Réponse à la question 1 :

- $P(M_1|B) \approx 32{,}3\%$
- $P(M_2|B) \approx 48{,}4\%$
- $P(M_3|B) \approx 19{,}4\%$

Question 2 :

Quelle est la probabilité que le stylo bleu provienne d'une machine qui fabrique moins de 7% de stylos bleus ?

Machines concernées : M2 (6%), M3 (4%)

$$P(M_2 \cup M_3|B) = P(M_2|B) + P(M_3|B) \approx 0{,}4839 + 0{,}1935 = 0{,}6774$$

Réponse à la question 2 : La probabilité que le stylo bleu provienne d'une machine produisant moins de 7% de stylos bleus est d'environ **67,7%**.

Loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète.

Exercice — Jetons de couleurs

On dispose d'un sac contenant :

- 3 jetons rouges,
- 2 jetons bleus,
- 1 jeton vert.

On tire deux jetons **sans remise**, successivement.
On définit la variable aléatoire X :

- $X = 0$ si les deux jetons sont de **même couleur**,
- $X = 1$ s'ils sont de **couleurs différentes**.

---

1. Loi de probabilité de X

Il y a au total 6 jetons, donc $\binom{6}{2} = 15$ paires possibles de jetons (ordre non important).

Cas $X = 0$ (même couleur) :

- Rouge–Rouge : $\binom{3}{2} = 3$ paires,
- Bleu–Bleu : $\binom{2}{2} = 1$ paire,
- Vert–Vert : impossible (1 seul vert).

Donc :

$$\mathbb{P}(X = 0) = \frac{3+1}{15} = \frac{4}{15}, \quad \mathbb{P}(X = 1) = 1 - \frac{4}{15} = \frac{11}{15}$$

2. Espérance $\mathbb{E}(X)$

Comme $X \in \{0, 1\}$:

$$\mathbb{E}(X) = 0 \cdot \frac{4}{15} + 1 \cdot \frac{11}{15} = \frac{11}{15}$$

3. Variance $\mathrm{Var}(X)$

On utilise :

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$$

Or, comme $X^2 = X$ (puisque $X = 0$ ou 1), on a :

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X) - (\mathbb{E}(X))^2 = \frac{11}{15} - \left(\frac{11}{15}\right)^2 = \frac{11}{15} \cdot \left(1 - \frac{11}{15}\right) = \frac{11}{15} \cdot \frac{4}{15} = \frac{44}{225}$$

4. Répétition de l'expérience 100 fois

Soit S le nombre de fois où $X = 1$ lors de 100 répétitions indépendantes.

On a alors :

$$S \sim \mathcal{B}(100, \frac{11}{15}) \quad \Rightarrow \quad \mathbb{E}(S) = 100 \cdot \frac{11}{15} = \frac{1100}{15} \approx 73{,}33$$

Conclusion : X suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{11}{15}$, avec :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{11}{15}, \quad \mathrm{Var}(X) = \frac{44}{225}, \quad \mathbb{E}(S) = \frac{1100}{15}$$

Exercice 4b

Un centre d'appels reçoit un nombre aléatoire d'appels par jour. Le nombre total d'appels X reçus au cours d'une journée suit une loi de Poisson de paramètre λ. Chaque appel est traité par un agent compétent avec une probabilité p, indépendamment des autres appels.

On note Z le nombre d'appels traités avec succès.

4b Exercice — Centre d'appels

On considère :

- $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$: le nombre total d'appels reçus dans la journée ;
- Chaque appel est traité avec succès avec une probabilité p, indépendamment des autres ;
- Z : le nombre d'appels traités avec succès.

1. Loi de Z conditionnellement à $X = n$

Conditionnellement à $X = n$, on effectue n essais indépendants avec probabilité de succès p.

Ainsi, on a :

$$Z \mid X = n \sim \mathcal{B}(n, p)$$

et donc :

$$\mathbb{P}(Z = k \mid X = n) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad \text{pour } 0 \leq k \leq n$$

2. Loi marginale de Z

On calcule :

$$\mathbb{P}(Z = k) = \sum_{n=k}^{\infty} \mathbb{P}(Z = k \mid X = n) \cdot \mathbb{P}(X = n)$$

On remplace :

$$\mathbb{P}(Z = k \mid X = n) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad \mathbb{P}(X = n) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}$$

D'où :

$$\mathbb{P}(Z = k) = \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \cdot e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}$$

On factorise :

$$= e^{-\lambda} \cdot \frac{(p\lambda)^k}{k!} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{[(1-p)\lambda]^{n-k}}{(n-k)!}$$

On pose $m = n - k$:

$$= e^{-\lambda} \cdot \frac{(p\lambda)^k}{k!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{[(1-p)\lambda]^m}{m!} = e^{-\lambda} \cdot \frac{(p\lambda)^k}{k!} \cdot e^{(1-p)\lambda}$$

Finalement :

$$\mathbb{P}(Z = k) = \frac{(p\lambda)^k}{k!} e^{-p\lambda}$$

Donc :

$$Z \sim \mathcal{P}(p\lambda)$$

3. Espérance de Z sans théorème

On utilise la formule de l'espérance conditionnelle :

$$\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}[\mathbb{E}(Z \mid X)]$$

Or $Z \mid X = n \sim \mathcal{B}(n, p)$ donc :

$$\mathbb{E}(Z \mid X) = pX \Rightarrow \mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}(pX) = p \cdot \mathbb{E}(X) = p\lambda$$

Conclusion : $Z \sim \mathcal{P}(p\lambda)$ et $\mathbb{E}(Z) = p\lambda$.