Topologie du point de vue différentiable

Maryam Kouhkan Emanuel Morille

10 février 2026

Table des matières

3 Démonstration du Théorème de Sard

Théorème 3.1 (Théorème de Sard)**.** Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}^p$ une application lisse. On note C l'ensemble des points critiques de f, c'est-à-dire l'ensemble défini par :

$$C \coloneqq \{x \in U \mid \operatorname{rang}(\mathrm{d}f_x) < p\}.$$

Alors l'image $f(C) \subset \mathbb{R}^p$ est de mesure de Lebesgue nulle.

Démonstration. On procède par récurrence sur n. L'énoncé a un sens pour $n \geq 0$, $p \geq 1$ (par définition $\mathbb{R}^0$ consiste en un unique point). Pour initier la récurrence, le Théorème 3.1 est certainement vrai pour $n = 0$. On considère maintenant $n \geq 1$ et le Théorème 3.1 vrai pour $n - 1$.

On note $C_1 \subset C$ l'ensemble des $x \in U$ tels que la différentielle $\mathrm{d}f_x$ soit nulle. Plus généralement, pour tout $k \geq 1$, on note C_k l'ensemble des $x \in U$ tels que toutes les différentielles de f d'ordre inférieur ou égal à k s'annulent en x :

$$C_k \coloneqq \{x \in U \mid \forall 1 \leqslant i \leqslant k, \mathrm{d}^i f_x = 0\}.$$

Ainsi, on a une suite décroissante d'ensembles fermés :

$$C \supset C_1 \supset C_2 \supset C_3 \supset \cdots$$

La démonstration sera divisée en trois étapes comme suit :
- L'image $f(C \setminus C_1)$ est de mesure nulle.
- Pour tout $i \geq 1$, l'image $f(C_i \setminus C_{i+1})$ est de mesure nulle.
- Pour tout k suffisament grand, l'image $f(C_k)$ est de mesure nulle.

Et on aura besoin du Théorème de Fubini suivant.

Théorème 3.2. Soit $A \subset \mathbb{R}^p$ un ensemble mesurable. Si l'intersection de A avec chaque hyperplan de la forme $\{t\} \times \mathbb{R}^{p-1}$ est de mesure nulle, alors A est de mesure nulle.

Démonstration. D'après le Théorème de Fubini-Tonelli :

$$\begin{aligned}\lambda_p(A) = \int_{\mathbb{R}^p} \mathbb{1}_A(x)\mathrm{d}\lambda_p(x) &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^{p-1}} \mathbb{1}_A(t,x)\mathrm{d}\lambda_{p-1}(x)\mathrm{d}\lambda_1(t) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \lambda_{p-1}(A \cap (\{t\} \times \mathbb{R}^{p-1}))\mathrm{d}\lambda_1(t) = \int_{\mathbb{R}} 0\mathrm{d}\lambda_1(t) = 0.\end{aligned}$$ □

Lemme 3.3. L'image $f(C \setminus C_1)$ est de mesure nulle.

Démonstration. On peut supposer que $p \geq 2$, car $C = C_1$ lorsque $p = 1$. Soit $x \in C \setminus C_1$.

L'objectif est de trouver un voisinage ouvert $V \subset \mathbb{R}^n$ de x tel que $f(V \cap C)$ soit de mesure nulle. Puisque $C \setminus C_1$ peut être recouvert par une union dénombrable de tels voisinages (l'espace $\mathbb{R}^n$ est séparable), par sous-additivité de la mesure, cela montrera que $f(C \setminus C_1)$ est de mesure nulle.

Puisque $x \notin C_1$, sans perte de généralité, on peut supposer que la dérivée partielle $\partial f_1 / \partial x_1$ n'est pas nulle en x. On considère l'application $h\colon U \to \mathbb{R}^n$ définie par :

$$h(x) = (f_1(x), x_2, \dots, x_n).$$

Puisque $\mathrm{d}h_x$ est inversible, d'après le Théorème d'inversion locale, l'application h est un difféomorphisme d'un voisinage ouvert V de x dans un ouvert V'. On considère alors la composition $g \coloneqq f \circ h^{-1}\colon V' \to \mathbb{R}^p$. On remarque que l'ensemble C' des points critiques de g est $h(V \cap C)$, on en déduit que l'ensemble $g(C')$ des valeurs critiques de g est $f(V \cap C)$.

Pour tout $(t, x_2, \dots, x_n) \in V'$, on remarque que $g(t, x_2, \dots, x_n)$ appartient à l'hyperplan $\{t\} \times \mathbb{R}^{p-1}$. Ainsi, g envoie les hyperplans sur des hyperplans. On considère sa restriction :

$$g_t\colon (\{t\} \times \mathbb{R}^{n-1}) \cap V' \to \{t\} \times \mathbb{R}^{p-1}.$$

On remarque qu'un point de $(\{t\} \times \mathbb{R}^{n-1}) \cap V'$ est critique pour g_t si et seulement s'il est critique pour g, en effet la matrice jacobienne de g est de la forme :

$$\mathrm{Jac(g)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ * & \mathrm{Jac}(g_t)) \end{pmatrix}.$$

D'après l'hypothèse de récurrence, l'ensemble des valeurs critiques de g^t est de mesure nulle dans $\{t\} \times \mathbb{R}^{p-1}$. On en déduit que l'intersection de $g(C')$ avec chaque hyperplan $\{t\} \times \mathbb{R}^{p-1}$ est de mesure nulle. Puisque cet ensemble est mesurable, d'après le Théorème 3.2, l'ensemble $g(C') = f(V \cap C)$ est de mesure nulle. Donc l'image $f(C \setminus C_1)$ est de mesure nulle. □

Lemme 3.4. Pour tout $i \geq 1$, l'image $f(C_i \setminus C_{i+1})$ est de mesure nulle.

Démonstration. Soit $x \in C_i \setminus C_{i+1}$. La démonstration est très similaire à celle du Lemme 3.3, mais elle est encore plus simple.

Puisque $x \notin C_{i+1}$, il existe une dérivée partielle $\partial^{i+1} f_r / \partial x_{s_1} \cdots \partial x_{s_{i+1}}$ qui n'est pas nulle en x. Ainsi la fonction définie par :

$$w(x) = \frac{\partial^i f_r}{\partial x_{s_2} \dots \partial x_{s_{i+1}}}$$

s'annule en x, mais $\partial w / \partial x_{s_1}$ ne s'annule pas en x. Sans perte de généralité, on peut supposer que $s_1 = 1$. Alors l'application $h\colon U \to \mathbb{R}^n$ définie par :

$$h(x) = (w(x), x_2, \dots, x_n)$$

est un difféomorphisme d'un voisinage ouvert V de x dans un ouvert V'. On remarque que h envoie $C_k \cap V$ dans l'hyperplan $\{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}$. On considère alors la composition $g \coloneqq f \circ h^{-1}\colon V' \to \mathbb{R}^p$ et sa restriction :

$$g_0\colon (\{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}) \cap V' \to \mathbb{R}^p.$$

D'après l'hypothèse de récurrence, l'ensemble des valeurs critiques de g_0 est de mesure nulle dans $\mathbb{R}^p$. Mais tout point de $h(C_i \cap V)$ est un point critique de g_0. On en déduit que $g_0(h(C_i \cap V)) = f(C_i \cap V)$ est de mesure nulle. Donc l'image $f(C_i \setminus C_{i+1})$ est de mesure nulle. □

Lemme 3.5. Pour tout k suffisamment grand, l'image $f(C_k)$ est de mesure nulle.

Démonstration. Soit $I^n \subset U$ un cube fermé d'arête de longueur $\delta > 0$. La démonstration est encore en partie similaire à celles des Lemmes 3.3 et 3.4.

Pour tout $x \in C_k \cap I^n$ et pour tout $h \in \mathbb{R}^n$ tel que $x + h \in I^n$, d'après le Théorème de Taylor et la compacité de I, on peut écrire :

$$f(x+h) = f(x) + R(x,h) \quad \text{avec} \quad \|R(x,h)\| \leq c\|h\|^{k+1}$$

où c est une constante qui ne dépend que de f et de I^n. On subdivise I^n en r^n cubes d'arêtes de longueur δ/r. Soit I_1 un cube de la subdivision contenant un point $x \in C_k$. Alors pour tout $y \in I_1$, il existe $h \in \mathbb{R}^n$ tel que :

$$y = x + h \quad \text{avec} \quad \|h\| \leq \sqrt{n}\frac{\delta}{r}.$$

On en déduit que $f(I_1)$ est contenu dans un cube centré en $f(x)$ d'arête de longueur a/r^{k+1} avec $a := 2c(\sqrt{n}\delta)^{k+1}$. Alors $f(C_k \cap I^n)$ est contenu dans une union d'au plus r^n cubes ayant une mesure totale :

$$V \leq r^n \left(\frac{a}{r^{k+1}}\right)^p = a^p r^{n-p(k+1)}.$$

En particulier, pour tout $k > n/p - 1$, il est clair que V tend vers 0 quand $r \to \infty$. On en déduit que $f(C^k \cap I^n)$ est de mesure nulle. Donc l'image $f(C^k)$ est de mesure nulle. □

Enfin, on peut écrire :

$$\begin{aligned} f(C) &= f((C \setminus C_1) \cup (C_1 \setminus C_2) \cup \cdots \cup (C_{k-1} \setminus C_k) \cup C_k) \\ &= f(C \setminus C_1) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{k-1} f(C_i \setminus C_{i+1}) \right) \cup f(C_k). \end{aligned}$$

Donc, d'après les Lemmes 3.3, 3.4 et 3.5, l'image $f(C)$ est de mesure nulle. □