

# Groupe de lecture TF

Théo FEIJOO

24 Mai 2026

## 1 Orientation

**Def : Orientation d'un ev.** Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie, on dit que deux bases  $\beta$  et  $\beta'$  ont la même orientation si  $\det(P_{\beta}^{\beta'}) > 0$  où  $P_{\beta}^{\beta'}$  est la matrice de passage entre les deux bases.

Cela définit une relation d'équivalence sur les bases comportant **deux classes**. Une *orientation* de  $E$  est le choix d'une de ces deux classes.

L'espace  $\mathbb{R}^n$  est muni d'une *orientation standard* associée à la base canonique. Par convention, on définit l'orientation d'un espace de dimension 0 comme  $+1$  ou  $-1$ .

**Notation** Si  $f : E \rightarrow F$  est une application linéaire entre espaces vectoriels de dimension finie,  $\beta$  et  $\gamma$  des bases de  $E$  et  $F$  respectivement. On note  $\det_{\beta}^{\gamma}(f) = \det(\text{Mat}_{\beta,\gamma}(f))$  le déterminant de  $f$  vue dans ces bases.

Si  $E$  et  $F$  sont orientés, on note  $\text{sign}(f)$  le signe de  $\det_{\beta}^{\gamma}(f)$  où  $\beta$  et  $\gamma$  sont orientés positivement. (Le signe est indépendant des représentants choisis).

**Def : Orientation d'une variété lisse** Une *orientation* d'une variété lisse  $M$  de dimension  $n$  est un choix d'orientation de chaque ev  $TM_x$  pour  $x \in M$  qui doivent coïncider de la façon suivante :

Pour chaque  $x \in M$ , il existe  $U$  un voisinage de  $x$  dans  $M$  et un difféomorphisme  $h : U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$  qui *préserve l'orientation*, c'est à dire que pour tout  $y \in U$ ,  $\text{sign}(dh_y) > 0$  (pour l'orientation choisie de  $TM_y$  et standard de  $\mathbb{R}^n$ ).

Si une telle orientation existe, on dit que  $M$  est *orientable*.

**Proposition** Si  $M$  est connexe et orientable, alors  $M$  a exactement deux orientations. ( $2^c$  si  $M$  a  $c$  composantes connexes).

**Exemple** Le ruban de Möbius et la bouteille de Klein ne sont pas orientables.

**Def : Orientation du bord** Si  $M$  est une variété avec bord, on définit de même une l'orientation pour  $M$ .

Et de plus,  $\partial M$  hérite d'une orientation associée à celle de  $M$ , en effet si  $x \in \partial M$ ,

on distingue trois types de vecteurs de  $TM_x$  : on dispose d'un difféomorphisme (carte)  $\varphi : U \rightarrow V \subset \mathbb{H}^n$ , soit  $v \in TM_x$ , on note  $z$  la dernière composante de  $d\varphi_x(v) \in \mathbb{R}^n$ , on dit alors que  $v$  est

- Tangent au bord si  $z = 0$  ie.  $z \in T(\partial M)_x \subset TM_x$
- Vers l'intérieur si  $z > 0$
- Vers l'extérieur si  $z < 0$

Cela ne dépend pas de la carte choisie.

$\partial M$  hérite alors d'une orientation de la manière suivante :

Si  $\dim M \geq 2$ , soit  $x \in \partial M$  et  $(v_1, \dots, v_n)$  une base orientée positivement de  $TM_x$  telle que  $v_1$  est vers l'extérieur et  $(v_2, \dots, v_n)$  est une base de  $T(\partial M)_x$ . Alors,  $(v_2, \dots, v_n)$  a l'orientation positive de  $T(\partial M)_x$ .

Cela existe toujours et définit bien une orientation sur  $\partial M$ .

Si  $\dim M = 1$  et  $a \in \partial M$ , on donne à  $\{a\}$  l'orientation  $+1$  si pour  $v \in TM_a$  on a  $[(v)$  a l'orientation positive ssi  $v$  est vers l'extérieur] et  $-1$  dans le cas contraire.

## 2 Degré de Brouwer

**Cadre**  $M$  et  $N$  sont des variétés lisses, orientées, sans bord, de même dimension  $n$ ,  $M$  compacte,  $N$  connexe, et  $f : M \rightarrow N$  une application lisse.

**Def : Degré de Brouwer** Soit  $y \in N$  une valeur régulière, on a que  $f^{-1}(y)$  est un ensemble fini car discret et  $M$  compact. On peut alors définir le degré de Brouwer de  $f$  en  $y$  :

$$\deg(f; y) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \text{sign}(df_x)$$

(pour les orientations choisies de  $TM_x$  et  $TN_{f(x)}$ )

**Thm A**  $\deg(f; y)$  ne dépend pas de la valeur régulière  $y$ . On peut donc définir  $\deg(f)$ .

**Thm B** Si  $f, g : M \rightarrow N$  sont lissement homotopes, alors  $\deg(f) = \deg(g)$ .

**Les preuves seront faites au tableau.**