

Le théorème de Sard et Brown

Louve Grosjean–Ducateau

Table des matières

1 Énoncé du théorème	1
2 Premières conséquences	2
3 Variétés avec bords	3
4 Le théorème du point fixe de Brouwer	4

1 Énoncé du théorème

Théorème 1.1 (Théorème de Sard et Brown).

Soit $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ une application lisse, avec $U \subset \mathbb{R}^m$ un ouvert. Soit $C = \{x \in U \mid \text{rang}(df_x) < n\}$. Alors l'image $f(C) \subset \mathbb{R}^n$ est de mesure nulle pour Lebesgue.

Remarque 1.2.

Avec les notations du théorème et en notant Leb_n la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$, le théorème dit donc que :

$$Leb_n(f(C)) = 0.$$

Ou encore que pour tout $\varepsilon > 0$, il est possible de recouvrir $f(C)$ par des rectangles de volume plus petit que ε .

Remarque 1.3.

Un ensemble de mesure nulle ne peut pas contenir d'ouvert. Donc l'intérieur de $f(C)$ est vide. De plus on a donc que $\mathbb{R}^n \setminus f(C)$ est dense dans $\mathbb{R}^n$.

On vas s'intéresser par la suite au cas $m \leq n$.

Remarque 1.4.

Le cas $m < n$ donne que $C = U$, donc que la mesure de $f(U)$ est nulle.

En effet, on a $\text{rang}(df_x) \leq \min(\dim(\mathbb{R}^n), \dim(\mathbb{R}^m))$.

Plus généralement, on vas prendre $f: M \rightarrow N$, avec M et N deux variétés de dimension respective m et n .

C est définie de la même manière :

$$C = \{x \in M \mid \text{rang}(df_x) < n\},$$

Dans le cas présent, on a $df_x: TM_x \rightarrow TN_x$.

Définition 1.5 (Ensemble des valeurs et points critiques et régulières).

- C est l'ensemble des *points critiques*.
- $f(C)$ est l'ensemble des *valeurs critiques*.
- $N \setminus f(C)$ est l'ensemble des *valeurs régulières*.

Remarque 1.6.

Il est intéressant de vérifier la cohérence des noms, c'est à dire de vérifier par exemple que C est égal à l'ensemble des points critique de f .

Pour tout $x \in C$, on a par définition que $\text{rang}(df_x) < n$. Or on a que $n \leq m$, donc $\text{rang}(df_x) < m$, alors df_x ne peut pas être inversible. Inversement soit x un point critique de f . Donc df_x n'est pas inversible, d'où $\text{rang}(df_x) \neq n$, mais comme $\text{rang}(df_x) \leq \min(n, m)$, on a donc $\text{rang}(df_x) < n$. D'où la cohérence de la définition.

La vérification de la cohérence des autres définition est une simple conséquence de la cohérence du nom de C .

La remarque 1.3 et la cohérence de la définition précédente, nous permet d'obtenir :

Corollaire 1.7.

L'ensemble des valeurs régulières d'une application lisse $f : M \rightarrow N$ est dense dans N .

2 Premières conséquences

Regardons des conséquences du corollaire.

Lemme 2.1.

Si on a $f : M \rightarrow N$ une application lisse entre deux variétés de dimension m et n et si $y \in N$ est une valeur régulière, alors l'ensemble $f^{-1}(y) \subset M$ est une variété lisse de dimension $m - n$.

Démonstration.

En prenant les notations du lemme. Soit $x \in f^{-1}(y)$.

Comme y est une valeur régulière, on a donc que $df_x(TM_x) = TN_y$.

Le noyau de df_x est donc un espace vectoriel de dimension $(m-n)$ car $\dim(df_x(TM_x)) + \dim(\text{Ker}(df_x)) = \dim(TM_x)$.

On peut supposer que $M \subset \mathbb{R}^k$.

Prenons alors $L : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^{m-n}$ une application linéaire tel que le noyau de df_x ne s'intersecte pas avec le noyau de L .

Prenons maintenant $F : M \rightarrow N \times \mathbb{R}^{m-n}$ définie par $F(x) = (f(x), L(x))$ pour $x \in M$.

On a alors $dF_x(v) = (df_x(v), L(v))$ car $dL_x(v) = L(v)$. Comme les noyaux ne s'intersecte pas alors $\text{Ker}(dF_x) = \{0\}$, donc dF_x est inversible.

Alors F donne un difféomorphisme d'un voisinage ouvert U de x sur un voisinage V de $(y, L(x))$.

Donc F donne un difféomorphisme entre $f^{-1} \cap U$ sur $(y \times \mathbb{R}^{m-n}) \cap V$.

Cela nous donne donc que $f^{-1}(y)$ est une variété lisse de dimension $m - n$. □

Exemple 2.2.

Ce lemme nous permet d'avoir de manière simple que la sphère unité S^{n-1} est une variété lisse de dimension $n - 1$.

Considérons $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$, pour $x \in \mathbb{R}^n$.

Pour cette fonction, qui est bien lisse, on a que tout $y \neq 0$ est une valeur régulière. En particulier $S^{n-1} = f^{-1}(1)$ et $1 \neq 0$ est une valeur régulière.

D'où S^{n-1} est une variété lisse de dimension $n-1$.

Définition 2.3 (Espace des vecteurs normal à M' dans M).

Si M' est une sous-variété de dimension m' contenue dans M une variété de dimension m , on a TM'_x un sous espace vectoriel de TM_x .

Le complémentaire orthogonal à TM'_x dans TM_x est appelé *l'espace des vecteurs normal à M' dans M* . C'est un espace vectoriel de dimension $m - m'$.

Lemme 2.4.

Le noyau de $df_x : TM_x \rightarrow TN_y$, ($y = f(x)$), est égal à l'espace tangent $TM'_x \subset TM_x$ de la variété $M' = f^{-1}(y)$. Donc df_x donne un isomorphisme du complémentaire orthogonal de TM'_x vers TN_y .

Démonstration.

Le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} M' & \xrightarrow{\text{inclusion}} & M \\ \downarrow f & & \downarrow f \\ \{y\} & \xrightarrow{\text{inclusion}} & N \end{array}$$

nous permet de voir que

$$\begin{array}{ccc} TM'_x & \xrightarrow{\text{inclusion}} & TM_x \\ \downarrow df_x & & \downarrow df_x \\ \{0\} & \xrightarrow{\text{inclusion}} & TN_y \end{array}$$

car $f(x) = y + 0$.

D'où $df_x(TM'_x) = \{0\}$, de plus une étude des dimensions nous permet d'avoir l'isomorphisme. $\square$

3 Variétés avec bords

Notons $H^m = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^m \mid 0 \leq x_m\}$.

Le bord ∂H^m de H^m est définie par :

$$\partial H^m = \mathbb{R}^{m-1} \times \{0\}.$$

Définition 3.1 (Variété avec bord).

Un sous ensemble $X \subset \mathbb{R}^k$ est appelé *m-variété lisse avec bord* si pour tout $x \in X$ il existe un voisinage $U \cap X$ difféomorphe, par f , à un ouvert $V \cap H^m$ de H^m .

Le *bord* de X , noté ∂X , correspond aux points x tel que $f(x) \in U \cap \partial H^m$.

Remarque 3.2.

∂X est une variété lisse de dimension $m - 1$.

L'intérieur de X , $X \setminus \partial X$ est variété lisse de dimension m .

On définit l'espace tangent à X de la même manière que dans le cas d'une variété lisse. On a toujours que TX_x est un espace vectoriel de dimension m , même si $x \in \partial X$.

Lemme 3.3.

Soit M une variété avec bord et $g : M \rightarrow \mathbb{R}$ avec 0 l'une de ses valeurs régulières. L'ensemble des $x \in M$ tel que $0 \leq g(x)$ est une variété lisse avec bord égale à $g^{-1}(0)$.

Démonstration.

La preuve est similaire à celle du Lemme 2.1. $\square$

Exemple 3.4.

Le disque unité $D^m = \{x \in \mathbb{R}^m \mid 0 \leq 1 - \sum x_i^2\}$ est une variété lisse avec bord, avec S^{m-1} son bord.

Lemme 3.5.

Soit $f : M \rightarrow N$ est lisse avec M une m -variété avec bord et N une n -variété, avec $m > n$.

Si $y \in N$ est une valeur régulière, alors f ainsi que $f|_{\partial X}$ sont des $(m - n)$ -variétés lisses avec bord. De plus le bord $\partial(f^{-1}(y))$ est égal à $(f^{-1}) \cap (\partial X)$.

Démonstration.

Du fait de la définition de variété avec bord, il suffit de montrer le résultat pour une application lisse $f : H^m \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Soit $y \in \mathbb{R}^n$ une valeur régulière et $x \in f^{-1}(y)$.

Si x est un point intérieur, alors $f^{-1}(y)$ est une variété lisse sur le voisinage de x .

Supposons que x est un point du bord. Choisissons $g : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application lisse définie sur U un voisinage de x dans $\mathbb{R}^m$ et qui coïncide avec f sur $U \cap H^m$. On peut supposer que g n'a pas de point critique, quitte à réduire U .

On a donc que $g^{-1}(y)$ est une variété lisse de dimension $m - n$ (lemme 2.1).

Considérons $\pi : g^{-1}(y) \rightarrow \mathbb{R}$ la projection selon la dernière coordonnée.

On a que π a 0 comme valeur régulière. De plus l'espace tangent à $g^{-1}(y)$ en un point $x \in \pi^{-1}(0)$ est égal au noyau de $dg_x = df_x : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Mais l'hypothèse que $f|_{\partial H^m}$ soit régulière en x nous dit que le noyau ne peut pas être contenue dans $\mathbb{R}^{m-1} \times \{0\}$ (conséquence du lemme 2.4).

Alors l'ensemble $g^{-1}(y) \cap H^m = f^{-1}(y) \cap U$ est une variété lisse avec bord, de bord $\pi^{-1}(0)$ par le lemme 3.3, ce qui nous donne le résultat. $\square$

4 Le théorème du point fixe de Brouwer

Lemme 4.1.

Soit X une variété compacte avec bord.

Il n'existe pas d'application lisse $f : X \rightarrow \partial X$ qui laisse ∂X fixe ponctuellement.

Démonstration.

Par l'absurde, supposons que l'on a une application lisse $f : X \rightarrow \partial X$ qui laisse ∂X fixe ponctuellement.

Soit $x \in \partial X$ une valeur régulière de f , alors x est aussi une valeur régulière de $f|_{\partial X}$. Cela nous dit que $f^{-1}(y)$ est une variété lisse de dimension 1, et que $f^{-1}(y) \cap \partial X = \{y\}$.

Mais $f^{-1}(y)$ est compact car X l'est. Or les seules variétés lisse de dimension 1 compactes sont les unions finies disjointes de cercles et de segments (voir remarque de fin du livre).

On a donc que $\partial(f^{-1}(y)) = f^{-1}(y) \cap \partial X$ comporte un nombre pair de point.

On a une contradiction d'où le résultat. $\square$

Remarque 4.2.

Le disque unité

$$D^m = \{x \in \mathbb{R}^m | x_1^2 + \dots + x_m^2 \leq 1\}$$

est une variété compacte avec bord, de bord S^{m-1} .

Un cas particulier du lemme nous donne que l'on ne peut pas étendre l'identité de S^{n-1} en une fonction de D^n dans S^{n-1} .

Lemme 4.3.

Toute application lisse $f : D^n \rightarrow D^n$ a un point fixe.

Démonstration. Supposons par l'absurde que f n'a pas de point fixe. Pour $x \in D^n$, prenons $h(x) \in S^{n-1}$ le point coupant S^{-1} après x sur la ligne passant par $f(x)$ et x . (Une telle ligne est définie par hypothèse sur f .)

Et h est lisse, ce qui se vérifie en écrivant

$$h(x) = x + \left(-x \cdot u + \sqrt{1 - x \cdot x + (x \cdot u)^2} \right) \left(\frac{x - f(x)}{\|x - f(x)\|} \right).$$

On a donc une application lisse, $h : D^n \rightarrow S^n$ qui laisse S^n fixe.

C'est impossible par le lemme 4.1. $\square$

Théorème 4.4 (Théorème du point fixe de Brouwer).

Toute fonction continue $F: D^n \rightarrow D^n$ a un point fixe.

Démonstration.

On va se ramener au lemme 4.3 en approximant la fonction F par des fonctions lisses.

Soit $\varepsilon > 0$.

Selon le théorème d'approximation polynomiale de Weierstrass, il existe une fonction polynomiale $P_\varepsilon: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ telle que

$$\|P_\varepsilon(x) - F(x)\| < \varepsilon$$

pour tout $x \in D^n$.

Pour faire en sorte que P_ε soit bien à valeur dans D^n , on le normalise. Dans le pire des cas il existe un $x \in D^n$ tel que $\|P_\varepsilon(x)\| = 1 + \varepsilon$. On considère donc

$$P = \frac{P_\varepsilon}{1 + \varepsilon}.$$

On a alors $P: D^n \rightarrow D^n$ une application lisse (car c'est un polynôme), telle que

$$\|P(x) - F(x)\| < 2\varepsilon$$

pour $x \in D^n$.

Supposons par l'absurde que F n'a pas de point fixe. Donc l'application $x: \|F(x) - x\|$ pour $x \in D^n$ possède un minimum non nul, que l'on notera x_{min} . On prend P un polynôme comme précédemment tel que

$$\|P(x) - F(x)\| < x_{min}$$

pour tout $x \in D^n$ (quitte à diminuer ε).

On a donc que $P(x) \neq x$ pour tout x par définition de x_{min} . Donc P n'a pas de point fixe. C'est impossible par le lemme 4.3.

Donc F a au moins un point fixe. □

Cette méthode est applicable de manière générale dans de nombreuses situations.

Pour chercher à prouver un résultat sur les fonctions continues on montre le résultat sur les fonctions lisses, puis avec un théorème d'approximation on l'étend aux fonctions seulement continues.