Topologie du point de vue différentiable

Louve Grosjean--Ducateau Emanuel Morille

27 janvier 2026

Table des matières

1 Variétés lisses et applications lisses 1
1.1 Rappels et premières définitions . . . 1
1.2 Espaces tangents et différentielles . . . 2
1.2.1 Dans le cas d'applications entre deux ouverts . . . 2
1.2.2 Dans le cas d'applications entre deux variétés lisses . . . 4
1.3 Valeurs régulières . . . 6
1.4 Théorème de d'Alembert-Gauss . . . 7

1 Variétés lisses et applications lisses

1.1 Rappels et premières définitions

Définition 1.1 (Application lisse entre deux ouverts)**.**
Soit $U \subset \mathbb{R}^k$ et $V \subset \mathbb{R}^l$ deux ouverts. Soit $f : U \to V$ une application. On dit que f est *lisse (ou de classe C^∞)* si pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $1 \leqslant i_1, \dots, i_n \leqslant n$, la dérivée partielle :

$$\frac{\partial^n f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_n}}$$

existe et est continue.

Définition 1.2 (Application lisse)**.**
Soit $X \subset \mathbb{R}^k$ et $Y \subset \mathbb{R}^l$ deux ensembles quelconques. Soit $f : X \to Y$ une application. On dit que f est *lisse (ou de classe C^∞)* si pour tout $x \in X$, il existe un voisinage ouvert U de x dans $\mathbb{R}^k$ et une application lisse $F : U \to \mathbb{R}^l$ telle que F et f coïncident sur $X \cap U$.

Proposition 1.3.
- Soit $X \subset \mathbb{R}^k$, $Y \subset \mathbb{R}^l$ et $Z \subset \mathbb{R}^m$ trois ensembles. Soit $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ deux applications lisses. Alors la composition $g \circ f : X \to Z$ est lisse.
- Soit $X \subset \mathbb{R}^k$ un ensemble. Alors l'application identité $\mathrm{id}_X : X \to X$ est lisse.

Démonstration.
- Soit $x \in X$. Puisque f est lisse (au sens de la Définition 1.2), il existe un voisinage ouvert U de x dans $\mathbb{R}^k$ et une application lisse (au sens de la Définition 1.1) $F : U \to \mathbb{R}^l$ qui coïncide avec f sur $X \cap U$. On note $y \coloneqq f(x)$. Puisque g est lisse, il existe un voisinage ouvert V de y dans $\mathbb{R}^l$ et une application lisse $G : V \to \mathbb{R}^m$ qui coïncide avec g sur $Y \cap V$. On pose $W \coloneqq U \cap F^{-1}(V)$ et $H \coloneqq G \circ F|_W : W \to \mathbb{R}^m$. Alors W est un voisinage ouvert de x dans $\mathbb{R}^k$, et H est bien définie, lisse et coïncide avec $g \circ f$ sur $W \cap X$. Donc $g \circ f$ est lisse.
- Soit $x \in X$. On pose $U \coloneqq \mathbb{R}^k$ et $F \coloneqq \mathrm{id}_{\mathbb{R}^k} : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$. Alors U est un voisinage ouvert de x dans $\mathbb{R}^k$, et F est lisse et coïncide avec id_X sur $X \cap U$. Donc id_X est lisse. $\square$

this looks like cheating
ie never showing the paritial
derivatives of gof are C^\infty

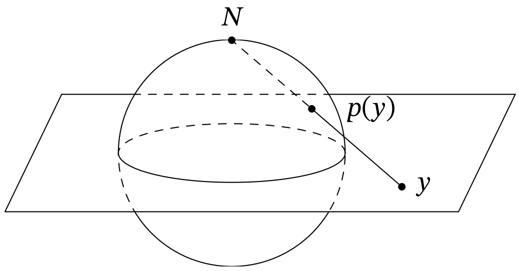
Définition 1.4 (Difféomorphisme)**.**
Soit $f : X \to Y$ une application. On dit que f est un *difféomorphisme* si f est bijective, et f et f^{-1} sont lisses.

Définition 1.5 (Variété lisse)**.**
Soit $M \subset \mathbb{R}^k$. On dit que M est une *variété lisse de dimension m* si pour tout $x \in M$, il existe un voisinage ouvert V de x dans M, un ouvert U de $\mathbb{R}^m$ et un difféomorphisme $g : U \to V$. Dans ce contexte, on dit que g est une *paramétrisation de V* et que g^{-1} est un *système de coordonnées sur V*.

Exemples 1.6.

- L'ensemble $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ est une variété lisse de dimension n.
  En effet, pour tout $x \in \mathbb{S}^n$, l'ensemble $\mathbb{S}^n \setminus \{-x\}$ est un voisinage ouvert de x dans $\mathbb{S}^n$, et la projection stéréographique inverse par rapport au pôle nord $N := (0, \dots, 0, 1)$ de $\mathbb{S}^n$:

For SL(2,R) find coordinates
for a neighborhood of I_2



Why not give another example
is SL(2,R) a manifold?
Can u show it without using
the implicit function theorem
ie 1 is a regular value
of det: M(2) -> R ?
What does det^-1(0)
looklike ?

  qui est donnée par l'application :

$$p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{S}^n \setminus \{N\}; y := (y_1, \dots, y_n) \mapsto \left(\frac{2y_1}{\|y\|^2 + 1}, \dots, \frac{2y_n}{\|y\|^2 + 1}, \frac{\|y\|^2 - 1}{\|y\|^2 + 1} \right)$$

  composée avec la rotation qui envoie N sur $-x$, est un difféomorphisme, et donc une paramétrisation de $\mathbb{S}^n \setminus \{-x\}$.
- L'ensemble $\Gamma := \{(x, \sin(1/x)) \mid x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$ est une variété lisse de dimension 1.
  En effet, pour tout $x \in \Gamma$, l'ensemble Γ est un voisinage ouvert de x dans Γ et l'application :

$$g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \Gamma; x \mapsto \left(x, \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right)$$

  est un difféomorphisme, et donc une paramétrisation de Γ.

why pick this?
ok it's a bit sauvage but why?

1.2 Espaces tangents et différentielles

1.2.1 Dans le cas d'applications entre deux ouverts

Définition 1.7 (Différentielle d'une application entre deux ouverts)**.**
Soit $U \subset \mathbb{R}^k$ et $V \subset \mathbb{R}^l$ deux ouverts. Soit $f : U \to V$ une application lisse. Pour tout $x \in U$, on appelle *différentielle de f en x* l'application linéaire $\mathrm{d}f_x : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$ telle que pour tout $h \in \mathbb{R}^k$ suffisamment petit :

$$f(x + h) = f(x) + \mathrm{d}f_x(h) + o_{h \to 0}(h).$$

Proposition 1.8.

- Soit $U \subset \mathbb{R}^k$, $V \subset \mathbb{R}^l$ et $W \subset \mathbb{R}^m$ trois ouverts. Soit $f : U \to V$ et $g : V \to W$ deux applications lisses. Alors pour tout $x \in U$:

$$\mathrm{d}(g \circ f)_x = \mathrm{d}g_{f(x)} \circ \mathrm{d}f_x.$$

  C'est-à-dire, pour tout diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} & V \arrow[dr, "g"] & \\ U \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "g \circ f"'] & & W \end{tikzcd}$$

on a un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{R}^l \arrow[dr, "\mathrm{d}g_{f(x)}"] & \\ \mathbb{R}^k \arrow[ur, "\mathrm{d}f_x"] \arrow[rr, "\mathrm{d}(g\circ f)_x"'] & & \mathbb{R}^m \end{tikzcd}$$

- Soit $U \subset U' \subset \mathbb{R}^k$ deux ouverts. Soit $i : U \to U'$ l'application inclusion. Alors pour tout $x \in U$, la différentielle $\mathrm{d}i_x : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ est l'application identité.
- Soit $L : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$ une application linéaire. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}^k$:

$$\mathrm{d}L_x = L.$$

Démonstration.

- Soit $x \in U$. Pour tout $h \in \mathbb{R}^k$ suffisamment petit :

$$\begin{aligned} g(f(x+h)) &= g(f(x) + \mathrm{d}f_x(h) + o_{h\to 0}(h)) \\ &= g(f(x)) + \mathrm{d}g_{f(x)}(\mathrm{d}f_x(h) + o_{h\to 0}(h)) + o_{h\to 0}(\mathrm{d}f_x(h) + o_{h\to 0}(h)) \\ &= g(f(x)) + \mathrm{d}g_{f(x)}(\mathrm{d}f_x(h)) + o_{h\to 0}(h). \end{aligned}$$

  Donc $\mathrm{d}(g \circ f)_x = \mathrm{d}g_{f(x)} \circ \mathrm{d}f_x$.
- Soit $x \in U$. Pour tout $h \in \mathbb{R}^k$ suffisamment petit :

$$i(x+h) = x + h = i(x) + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^k}(h).$$

  Donc $\mathrm{d}i_x = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^k}(h)$.
- Soit $x \in \mathbb{R}^k$. Pour tout $h \in \mathbb{R}^k$:

$$L(x+h) = L(x) + L(h).$$

  Donc $\mathrm{d}L_x = L$. □

Proposition 1.9.
Soit $U \subset \mathbb{R}^k$ et $V \subset \mathbb{R}^l$ deux ouverts. Soit $f : U \to V$ un difféomorphisme. Alors pour tout $x \in U$, la différentielle $\mathrm{d}f_x : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$ est inversible, et en particulier $k = l$.

Démonstration.
Soit $x \in U$. Alors, d'après la Proposition 1.8 :

$$\mathrm{id}_{\mathbb{R}^k} = \mathrm{d}(\mathrm{id}_U)_x = \mathrm{d}(f^{-1} \circ f)_x = \mathrm{d}(f^{-1})_{f(x)} \circ \mathrm{d}f_x$$

et de la même manière :

$$\mathrm{id}_{\mathbb{R}^l} = \mathrm{d}(\mathrm{id}_V)_{f(x)} = \mathrm{d}(f \circ f^{-1})_{f(x)} = \mathrm{d}f_x \circ \mathrm{d}(f^{-1})_{f(x)}.$$

Donc $\mathrm{d}f_x$ est inversible, de plus $\mathbb{R}^k$ est isomorphe à $\mathbb{R}^l$, d'où $k = l$. □

Théorème 1.10 (Théorème d'inversion locale)**.**
Soit $U \subset \mathbb{R}^k$ un ouvert. Soit $f : U \to \mathbb{R}^l$ une application lisse. Soit $x \in U$. Si la différentielle $\mathrm{d}f_x$ est inversible, alors il existe un voisinage ouvert V de x dans U et un voisinage ouvert W de $f(x)$ dans $\mathbb{R}^l$ tels que f est un difféomorphisme de V dans W.

un mot sur la preuve ?

what about the other definitions
ie the gamma' for a curve
gamma?

1.2.2 Dans le cas d'applications entre deux variétés lisses

Définition 1.11 (Espace tangent)**.**
Soit $M \subset \mathbb{R}^k$ une variété lisse de dimension m. Pour tout $x \in M$, on appelle *espace tangent à M en x* l'espace vectoriel de dimension m défini par :

$$TM_x := \mathrm{im}(\mathrm{d}g_u)$$

où $g\colon U \to W$ est une paramétrisation d'un voisinage ouvert W de x dans M, avec $U \subset \mathbb{R}^m$ un ouvert et $u := g^{-1}(x)$. Ici, on considère g comme une application de U dans $\mathbb{R}^m$, de manière à ce que la différentielle $\mathrm{d}g_u$ soit bien définie.

Remarque 1.12.
Il faut vérifier que la Définition 1.11 est correcte, c'est-à-dire, que TM_x ne dépend pas du choix de la paramétrisation g et est bien un espace vectoriel de dimension m.

Soit $h\colon V \to W'$ une deuxième paramétrisation d'un voisinage ouvert W' de x dans M. On note $v := h^{-1}(x)$. On pose $U_1 := g^{-1}(W \cap W')$ et $V_1 := h^{-1}(W \cap W')$. Alors U_1 est un voisinage ouvert de u dans $\mathbb{R}^m$, V_1 est un voisinage ouvert de v dans $\mathbb{R}^m$ et $h^{-1} \circ g\colon U_1 \to V_1$ est un difféomorphisme qui envoie u sur v, d'après la Proposition 1.8, le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{R}^k & \\ U_1 \arrow[ur, "g"] \arrow[rr, "h^{-1}\circ g"'] & & V_1 \arrow[ul, "h"'] \end{tikzcd}$$

donne le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{R}^k & \\ \mathbb{R}^m \arrow[ur, "\mathrm{d}g_u"] \arrow[rr, "\simeq", "\mathrm{d}(h^{-1}\circ g)_u"'] & & \mathbb{R}^m \arrow[ul, "\mathrm{d}h_v"'] \end{tikzcd}$$

et d'après la Proposition 1.9, la différentielle $\mathrm{d}(h^{-1} \circ g)_u$ est inversible, on a :

$$\begin{aligned} \mathrm{im}(\mathrm{d}g_u) &= \mathrm{im}(\mathrm{d}h_v \circ \mathrm{d}(h^{-1} \circ g)_u) \subset \mathrm{im}(\mathrm{d}h_v) \\ \mathrm{im}(\mathrm{d}h_v) &= \mathrm{im}(\mathrm{d}g_u \circ (\mathrm{d}(h^{-1} \circ g)_u)^{-1}) \subset \mathrm{im}(\mathrm{d}g_v). \end{aligned}$$

Donc $\mathrm{im}(\mathrm{d}g_u) = \mathrm{im}(\mathrm{d}h_v)$ et TM_x ne dépend pas du choix de la paramétrisation g.

Puisque g^{-1} est lisse, il existe un voisinage ouvert W' de x et une application lisse $F\colon W' \to \mathbb{R}^m$ qui coïncide avec g^{-1} sur $W \cap W'$. On pose $U_0 := g^{-1}(W \cap W')$. Alors U_0 est un voisinage ouvert de x dans $\mathbb{R}^m$ et $g \circ F\colon U_0 \to \mathbb{R}^m$ est l'application inclusion, d'après la Proposition 1.8, le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} & W \arrow[dr, "F"] & \\ U_0 \arrow[ur, "g"] \arrow[rr, "\text{inclusion}"'] & & \mathbb{R}^m \end{tikzcd}$$

donne le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{R}^k \arrow[dr, "\mathrm{d}F_x"] & \\ \mathbb{R}^m \arrow[ur, "\mathrm{d}g_u"] \arrow[rr, "\text{identité}"'] & & \mathbb{R}^m \end{tikzcd}$$

Donc $\mathrm{d}g_u$ est injective et TM_x est un espace vectoriel de dimension m.

Définition 1.13 (Différentielle d'une application entre deux variétés)**.**
Soit $M \subset \mathbb{R}^k$ et $N \subset \mathbb{R}^l$ deux variétés lisses. Soit $f: M \to N$ une application lisse. Pour tout $x \in M$, on appelle *différentielle de f en x* l'application linéaire $\mathrm{d}f_x: TM_x \to TN_{f(x)}$ définie par :

$$\forall h \in TM_x, \mathrm{d}f_x(h) := \mathrm{d}F_x(h)$$

où $F: X \to \mathbb{R}^l$ est une application lisse qui coïncide avec f sur $M \cap X$, avec X un voisinage ouvert de x dans M.

Remarque 1.14.

that's good!!!

Une nouvelle fois, il faut vérifier que la Définition 1.13 est correcte, c'est-à-dire, que $\mathrm{d}f_x$ est bien définie et ne dépend pas du choix de l'application F.

Soit $g: U \to W$ une paramétrisation d'un voisinage ouvert W de x dans M, et $h: V \to W'$ une paramétrisation d'un voisinage ouvert W' de $f(x)$ dans N. Quitte à remplacer U et W par des ensembles plus petits, on peut supposer que $W \subset X$ et $f(W) \subset W'$. Alors $h^{-1} \circ f \circ g: U \to V$ est une application lisse bien définie. On note $u := g^{-1}(x)$ et $v := h^{-1}(x)$. D'après la Proposition 1.8, le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "F"] & \mathbb{R}^l \\ U \arrow[u, "g"] \arrow[r, "h^{-1}\circ f\circ g"'] & V \arrow[u, "h"'] \end{tikzcd}$$

donne le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^k \arrow[r, "\mathrm{d}F_x"] & \mathbb{R}^l \\ \mathbb{R}^m \arrow[u, "\mathrm{d}g_u"] \arrow[r, "\mathrm{d}(h^{-1}\circ f\circ g)_u"'] & \mathbb{R}^n \arrow[u, "\mathrm{d}h_v"'] \end{tikzcd}$$

de plus, d'après la Proposition 1.9, la différentielle $\mathrm{d}g_u$ est inversible et on a :

$$\mathrm{d}F_x = \mathrm{d}h_v \circ \mathrm{d}(h^{-1} \circ f \circ g)_u \circ (\mathrm{d}g_u)^{-1}.$$

Donc $\mathrm{im}(\mathrm{d}F_x) \subset TM_y$ et $\mathrm{d}f_x$ est bien définie, et d'après cette dernière expression, $\mathrm{d}f_x$ ne dépend pas du choix de l'application F.

Proposition 1.15.

- Soit $M \subset \mathbb{R}^k$, $N \subset \mathbb{R}^l$ et $P \subset \mathbb{R}^m$ trois variétés lisses. Soit $f: M \to N$ et $g: N \to P$ deux applications lisses. Alors pour tout $x \in M$:

$$\mathrm{d}(g \circ f)_x = \mathrm{d}g_{f(x)} \circ \mathrm{d}f_x.$$

- Soit $M \subset M' \subset \mathbb{R}^k$ deux variétés lisses. Soit $i: M \to M'$ l'application inclusion. Alors pour tout $x \in M$, on a $TM_x \subset TM'_x$ et $\mathrm{d}i_x: TM_x \to TM'_x$ est l'application inclusion.

Démonstration.

- Avec les mêmes notations que la Démonstration de la Proposition 1.3, on a :

$$\mathrm{d}(g \circ f)_x = \mathrm{d}(G \circ F)_x = \mathrm{d}G_{F(x)} \circ \mathrm{d}F_x = \mathrm{d}g_{f(x)} \circ \mathrm{d}f_x.$$

- Avec les mêmes notations que la Remarque 1.12, où $U \subset \mathbb{R}^l$ et $V \subset \mathbb{R}^m$, d'après la Proposition 1.8, le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{R}^k & \\ U_1 \arrow[ur, "g"] \arrow[rr, "h^{-1}\circ g"'] & & V_1 \arrow[ul, "h"'] \end{tikzcd}$$

donne le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{R}^k & \\ \mathbb{R}^l \arrow[ur, "\mathrm{d}g_u"] \arrow[rr, "\mathrm{d}(h^{-1}\circ g)_u"'] & & \mathbb{R}^m \arrow[ul, "\mathrm{d}h_v"'] \end{tikzcd}$$

Donc $\mathrm{im}(\mathrm{d}g_u) = \mathrm{im}(\mathrm{d}h_v \circ \mathrm{d}(h^{-1} \circ g)_u) \subset \mathrm{im}(\mathrm{d}h_v)$, c'est-à-dire, $TM_x \subset TM'_x$.

De la même manière, le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "i"] & M' \\ U_1 \arrow[u, "g"] \arrow[r, "h^{-1}\circ g"'] & V_1 \arrow[u, "h"'] \end{tikzcd}$$

donne le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} TM_x \arrow[r, "\mathrm{d}i_x"] & TM'_x \\ \mathbb{R}^l \arrow[u, "\mathrm{d}g_u"] \arrow[r, "\mathrm{d}(h^{-1}\circ g)_u"'] & \mathbb{R}^m \arrow[u, "\mathrm{d}h_v"'] \end{tikzcd}$$

Donc $\mathrm{d}i_x = \mathrm{d}h_v \circ \mathrm{d}(h^{-1} \circ g)_u \circ (\mathrm{d}g_u)^{-1} = \mathrm{id}_{TM_x}$ est l'application l'inclusion. □

Proposition 1.16.
Soit $M \subset \mathbb{R}^k$ et $N \subset \mathbb{R}^l$ deux variétés lisses de dimension m et n. Soit $f : M \to N$ un difféomorphisme. Alors pour tout $x \in M$, la différentielle df_x est inversible, et en particulier $m = n$.

Démonstration.
La démonstration est similaire à celle de la Proposition 1.9 □

OK but for other applications we need maps between manifolds of different dimensions

1.3 Valeurs régulières

Définition 1.17 (Points et valeurs réguliers)**.**
Soit $M \subset \mathbb{R}^k$ et $N \subset \mathbb{R}^l$ deux variétés lisses de même dimension. Soit $f : M \to N$ une application lisse. Soit $x \in M$ et $y \in N$.

- On dit que x est un *point régulier de* f si la différentielle $\mathrm{d}f_x$ est inversible.
- On dit que y est une *valeur régulière de* f si tous les points de $f^{-1}(y)$ sont réguliers.

Définition 1.18 (Points et valeurs critiques)**.**
Soit $M \subset \mathbb{R}^k$ et $N \subset \mathbb{R}^l$ deux variétés lisses de même dimension. Soit $f : M \to N$ une application lisse. Soit $x \in M$ et $y \in N$.

- On dit que x est un *point critique de* f si la différentielle $\mathrm{d}f_x$ n'est pas inversible.
- On dit que y est une *valeur critique de* f s'il existe un point de $f^{-1}(y)$ qui est critique.

Remarque 1.19.
Si M est compact et $y \in N$ est une valeur régulière de f, alors $f^{-1}(y)$ est un ensemble fini.

Proposition 1.20.
Soit $M \subset \mathbb{R}^k$ et $N \subset \mathbb{R}^l$ deux variétés lisses de même dimension. Soit $f : M \to N$ une application lisse. Si M est compacte, alors l'application $y \mapsto \sharp f^{-1}(y)$ est localement constante sur l'ensemble des valeurs régulières de f.

are we agreed to call f^{-1} the fibre ?
the cardinality of the fibre is the degree isn't it?

are we agreed to call
f^{-1} the fibre ?
the cardinality of the fibre
is the degree isn't it?

Démonstration.
Soit $y \in N$ une valeur régulière de f. On note $k \coloneqq \sharp f^{-1}(y)$ et $\{x_1, x_2, ..., x_k\} \coloneqq f^{-1}(y)$. Alors, d'après le Théorème 1.10, il existe $U_1, U_2, \dots, U_k$ des voisinages ouverts respectifs de $x_1, x_2, \dots, x_k$ deux-à-deux disjoints et $V_1, V_2, \dots, V_k$ des voisinages ouverts de y dans N tels que pour tout $1 \leqslant i \leqslant k$, l'application f est un difféomorphisme de U_i dans V_i. On considère l'ouvert :

$$V \coloneqq (V_1 \cap V_2 \cap \dots \cap V_k) \setminus f(M \setminus (U_1 \cup U_2 \cup \dots \cup U_k)).$$

Soit $y' \in V$. Par définition des V_i, puisque les U_i sont disjoints, le point y' a au moins k antécédents par f. De plus, si par l'absurde y' avait un autre antécédent par f, alors ce dernier appartiendrait à $M \setminus (U_1 \cup U_2 \cup \dots \cup U_k)$, en particulier y' appartiendrait à $f(M \setminus (U_1 \cup U_2 \cup \dots \cup U_k))$.

Donc y' a exactement k antécédents par f et $y \mapsto \sharp f^{-1}(y)$ est localement constante. □

1.4 Théorème de d'Alembert-Gauss

Théorème 1.21 (Théorème de d'Alembert-Gauss)**.**
Tout polynôme complexe non constant admet au moins une racine complexe.

Démonstration.
Soit $P \coloneqq a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_0 \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme non constant avec $a_n \neq 0$. Pour utiliser la Proposition 1.20, on veut étudier P sur une variété lisse compacte.

D'après l'Exemple 1.6, la projection stéréographique par rapport au pôle nord $N \coloneqq (0, 0, 1)$, que l'on note $h_+ : \mathbb{S}^2 \setminus \{N\} \to \mathbb{C}$, est un difféomorphisme. On considère l'application :

$$f : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2; x \mapsto \begin{cases} h_+^{-1}(P(h_+(x))) & \text{si } x \neq N \\ N & \text{si } x = N. \end{cases}$$

Si f est surjective, alors P admet nécessairement au moins une racine car h_+^{-1} est bijective.

Par opérations élémentaires, l'application f est lisse sur $\mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$. On montre que f est lisse en N. On note $h_- : \mathbb{S}^2 \setminus \{S\} \to \mathbb{C}$ la projection stéréographique par rapport au pôle sud $S \coloneqq (0, 0, -1)$. Alors h est un difféomorphisme, et on considère l'application :

$$Q : \mathbb{C} \to \mathbb{C}; z \mapsto h_-(f(h_-^{-1}(z))).$$

Un premier calcul, ou une observation géométrique, donne :

$$h_+(h_-^{-1}(z)) = \frac{1}{\bar{z}}$$

et on en déduit :

$$Q(z) = h_-(h_+^{-1}(P(h_+(h_-^{-1}(z))))) = \frac{1}{\overline{P(1/\bar{z})}} = \frac{z^n}{\overline{a_n} + \overline{a_{n-1}} z + \dots + \overline{a_0} z^n}.$$

Puisque $a_n \neq 0$, l'application Q est lisse au voisinage de 0. De plus, on peut écrire $f = h_-^{-1} \circ Q \circ h_-$. Donc f est lisse en N.

Si l'ensemble des valeurs régulières de f est connexe, d'après la Proposition 1.20, l'application $y \mapsto \sharp f^{-1}(y)$ est constante sur l'ensemble des valeurs régulières, si de plus $y \mapsto \sharp f^{-1}(y)$ ne s'annule pas, alors f atteint l'ensemble de ses valeurs régulières, donc f est surjective.

Puisque P est non constant, le polynôme P' n'est pas identiquement nul et admet un nombre fini de racines, d'après le Théorème 1.10, en dehors de ces racines P est un difféomorphisme local. Alors l'ensemble des valeurs régulières de f est $\mathbb{S}^2$ privée d'un nombre fini de points, qui est connexe. De plus, si par l'absurde $y \mapsto \sharp f^{-1}(y)$ est identiquement nulle, alors f n'atteint que ses valeurs critiques, puisque $\mathbb{S}^2$ est connexe, on en déduit que f est constante, ce qui contredit le fait que P est non constant.

Donc P admet au moins une racine. □

what are the maps
S^1 -> S^1
up to homotopy?
S^2 -> S^2
up to homotopy?
are there maps S^3 ->S^3
without fixed points

what is the degree of
P : S^2 -> S^2?
aren't we just showing it's
surjective?
why don't we use Newton
to find a root?