Topologie du point de vue différentiable
Champs de vecteurs et nombre d'Euler

L. Bissay

31 mars 2026

Table des matières

I. Index d'un champ de vecteurs

I.a Champs de vecteurs

DÉFINITION (Champ de vecteurs dans $\mathbf{R}^n$) — Soit $U \subset \mathbf{R}^n$ un ouvert. Un ***champ de vecteurs*** est simplement une application $v : U \to \mathbf{R}^n$.

DÉFINITION (Champ de vecteurs dans une variété) — Soit $X \subset \mathbf{R}^n$ une variété lisse. Un ***champ de vecteurs*** dans X à valeurs dans $\mathbf{R}^n$ est une application $v : X \to \mathbf{R}^n$ lisse telle que

$$\forall x \in X, \qquad v(x) \in T_x(X).$$

On appelle ***zéros*** de v les points $x \in X$ tels que $v(x) = 0$.

REMARQUE — Pour $x \in X$, si $v(x) \neq 0$, alors v est pratiquement constante en direction et en norme autour de x. Cependant, si x est un zéro de v, alors la direction de v peut changer drastiquement dans des voisinages de x, comme le montre la figure suivante (tirée de l'ouvrage de Guillemin et Pollack) :

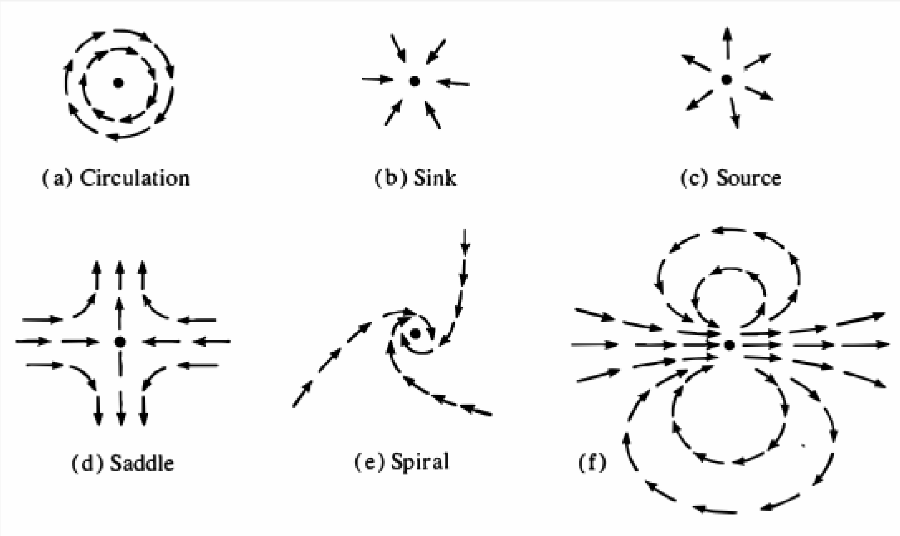

FIGURE 1 – Différentes possibilités autour d'un zéro de v

Notamment, remarquons que la forme de la variété influence les possibilités des patterns pour nos zéros.

EXEMPLE — Par exemple, il est impossible d'avoir exactement un zéro point selle et un zéro source sur la sphère $\mathbf{S}^2$, alors que c'est bien possible sur le tore...

EXEMPLE — Sur le tore, il est possible de construire un champ de vecteurs sans zéros, chose impossible sur la sphère $\mathbf{S}^2$ (Brouwer).

I.b Index d'un champ de vecteurs dans $\mathbf{R}^n$

Définition — Soient $v : U \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ un champ de vecteurs et $z \in U$ un zéro de v isolé. Soit S une sphère centrée autour de z dans laquelle il n'y a pas de zéro de v. Alors l'application

$$\overline{v} : x \longmapsto \frac{v(x)}{|v(x)|}$$

envoie S vers la sphère $\mathbf{S}^{n-1}$. On appelle alors ***index*** de v au zéro z le degré de cette application, et on le note $\iota(v, z)$ ou plus simplement ι lorsqu'il n'y a pas d'ambiguité.

Remarque — Cette quantité permet de quantifier le changement directionnel de v autour de ses zéros.

Exemple — Soit $k \in \mathbf{N}$. On se place dans $\mathbf{C}$, alors
- $z \mapsto z^k$ a un zéro d'index k à l'origine ;
- $z \mapsto \overline{z}^k$ a un zéro d'index $-k$ à l'origine.

I.c Index d'un champ de vecteurs dans une variété

Définition — Soient M, N deux variétés lisses. Soient v un champ de vecteurs sur M, v' un champ de vecteurs sur N et $f : M \to N$ une application différentiable. On dit que v et v' ***correspondent*** sous f lorsque

$$\forall x \in M, \qquad \mathrm{d}f_x\big(v(x)\big) = v'\big(f(x)\big).$$

Remarque — Si f est un difféomorphisme, alors v' est entièrement déterminé par v, on note alors

$$v' = \mathrm{d}f \circ v \circ f^{-1}.$$

Proposition — Soient $U, U' \subset \mathbf{R}^n$ deux ouverts, $f : U \to U'$ un difféomorphisme et v, v' deux champs de vecteurs (respectivement sur U et sur U') tels que

$$v' = \mathrm{d}f \circ v \circ f^{-1}.$$

Alors pour tout z zéro de v isolé, on a

$$\iota(v, z) = \iota(v', f(z)).$$

Preuve — Sans perte de généralité, quitte à appliquer une homotopie, supposons $z = f(z) = 0$. Tout d'abord on suppose que f préserve l'orientation. On va alors s'aider du lemme suivant :

Lemme — Comme f préserve l'orientation, f est lissement isotope à l'identité.

(Pour prouver ce lemme, on peut poser

$$F : \begin{array}{rcl} \mathbf{R}^n \times [0,1] & \longrightarrow & \mathbf{R}^n \\ (x,t) & \longmapsto & \begin{cases} \frac{f(tx)}{t} & \text{si } 0 < t \leqslant 1 \\ \mathrm{d}f_0(x) & \text{sinon.} \end{cases} \end{array}$$

qui est lisse, et qui donne alors une isotopie lisse entre f et $\mathrm{d}f_0$, qui est elle-même lissement isotope à l'identité).

À partir de ce lemme, on construit alors une famille $(f_t)_{t\in[0,1]}$ d'applications lisses telles que $f_0 = \mathrm{id}$, $f_1 = f$ et $f_t(0) = 0$ pour tout t. Pour tout $t \in [0,1]$, notons

$$v_t := \mathrm{d}f_t \circ v \circ f_t^{-1}$$

qui sont bien définies (les f_t sont bien difféomorphes, en se basant sur le plan de la preuve du lemme).

De plus, ces champs de vecteurs sont bien non nuls sur une sphère suffisamment petite autour de 0, et au vu de la définition de l'index, qui est le degré de l'application $\overline{v_t}$, et comme le degré est un invariant par homotopie, on a bien

$$\iota(v,0) = \iota(v_0,0) = \iota(v_1,0) = \iota(v',0).$$

Puis, traitons le cas où f est une réflexion, on a alors

$$v' = f \circ v \circ f$$

et donc, pour tout x sur une sphère suffisamment petite autour de 0 sur laquelle v' ne s'annule pas, on a

$$\overline{v'}(x) = \frac{f(v(f(x)))}{|f(v(f(x)))|} = f\left(\frac{v(f(x))}{|v(f(x))|}\right) = f \circ \overline{v} \circ f(x)$$

et par propriété du degré vue au chapitre précédent, on a

$$\iota(v',0) = \deg\left(\overline{v'}\right) = \deg(f)^2 \deg\left(\overline{v}\right) = \deg(\overline{v}) = \iota(v,0)$$

car $\deg(f) = -1$ (réflexion).

Enfin, si f est un difféomorphisme ne préservant pas l'orientation quelconque, posons

$$r : \begin{array}{rcl} \mathbf{R}^n & \longrightarrow & \mathbf{R}^n \\ (x_1,\dots,x_n) & \longmapsto & (-x_1,x_2,\dots,x_n) \end{array}$$

qui est une réflexion. Posons ensuite $g := f \circ r$ qui est bien un difféomorphisme (car f et r le sont), et notamment

$$\det(\mathrm{d}g_0) = \det(\mathrm{d}f_{r(0)})\det(\mathrm{d}r_0) = \det(\mathrm{d}f_0)\det(\mathrm{d}r_0) = -\det(\mathrm{d}f_0)$$

et comme $\det(\mathrm{d}f_0) < 0$ car f ne préserve pas l'orientation, on a bien $\det(\mathrm{d}g_0) > 0$ donc g préserve l'orientation. On peut alors se ramener aux deux cas précédent car $f = g \circ r$. ∎

Définition — Soit v un champ de vecteurs sur une variété lisse M. Soient z un zéro isolé de v et φ une paramétrisation d'un voisinage de z dans M, alors l'***index*** de v en z est défini comme l'index de $\mathrm{d}g^{-1} \circ v \circ g$ en $g^{-1}(z)$.

Remarque — La proposition donne que l'index d'un champ de vecteurs sur $\mathbf{R}^n$ est invariant par difféomorphisme, ce qui assure bien la bonne définition de l'index pour un champ de vecteurs sur une variété.

II. Théorème de Poincaré-Hopf

Le but de cette section est de commencer à évoquer le théorème de Poincaré-Hopf, d'en donner une preuve dans un cas particulier, et d'évoquer quelques résultats préliminaires avant la semaine prochaine.

Théorème (de Poincaré-Hopf) — Soient M une variété lisse compacte et v un champ de vecteurs lisse sur M avec des zéros isolés. On suppose de plus que si M est avec bord, alors v pointe à l'extérieur sur tous les points du bord. Alors on a

$$\sum_{z\ ;\ v(z)=0} \iota(v,z) = \chi(M)$$

où $\chi(M)$ est le nombre d'Euler de la variété (évoqué lors de la présentation sur la classification des variétés de dimension 1).

Remarque — En particulier, cette somme d'index est donc un invariant topologique de M et ne dépend pas du champ de vecteurs choisi.

II.a Cas d'une variété compacte avec bord

Définition — Soit $X \subset \mathbf{R}^n$ une variété lisse compacte avec bord de dimension n, on définit l'***application de Gauss*** par l'application $g : \partial X \to \mathbf{S}^{n-1}$ qui à x associe le vecteur unitaire sortant normal à x.

Lemme (de Hopf) — Soient $X \subset \mathbf{R}^n$ une variété lisse compacte avec bord et v un champ de vecteurs lisse sur X avec des zéros isolés, tels que v pointe à l'extérieur sur tous les points du bord de X, alors on a

$$\sum_{z\ ;\ v(z)=0} \iota(v,z) = \deg(g).$$

Preuve — Comme X est compact et que les zéros de v sont isolés, on a donc un nombre fini de zéros. Soit $\varepsilon > 0$ tel que pour tout z zéro de v, la boule $\mathcal{B}(z,\varepsilon)$ ne contienne pas d'autre zéro que z et ne s'intersecte pas avec le bord de X.

Posons alors

$$X' := X \setminus \bigcup_{z\ ;\ v(z)=0} \mathcal{B}(z,\varepsilon)$$

qui est toujours une variété lisse compacte avec bord. Notamment, sur X', v ne s'annule jamais, ce qui permet de considérer $\overline{v}$ sur tout X', et qui envoie alors les points de X' sur $\mathbf{S}^{m-1}$.

On utilise alors le théorème suivant, qui est basé sur le théorème de Stokes, et que Milnor semble utiliser librement :

Théorème — Si une application est définie sur une variété compacte et s'envoie dans une sphère de même dimension, alors la somme des degrés de cette application sur toutes les composantes du bord doit être égale à zéro.

Ainsi, on a donc

$$\deg(\overline{v}_{|\partial X}) + \sum_{z\ ;\ v(z)=0} \deg(\overline{v}_{|\mathcal{S}(z,\varepsilon)}) = 0.$$

Or, on peut remarquer que sur ∂X, v pointe vers l'extérieur par hypothèse, donc $\overline{v}$ est bien homotope à g. Puis pour tout z zéro de v, le degré de v sur la sphère de centre z et de rayon ε correspond à $-\iota(v, z)$ (le signe $-$ venant du fait qu'on voit ces parois comme les parois intérieures de X', et donc l'orientation est inversée par rapport à l'extérieur).

En réécrivant tout cela, on a donc bien l'égalité voulue. ∎

Remarque — On a aussi $\deg(g) = \chi(X)$ ce qui permet bien de faire le lien avec le théorème de Poincaré-Hopf dans ce cas particulier.

II.b Zéro non dégénéré

Définition — Soit v un champ de vecteurs dans $\mathbf{R}^n$ lisse. Soit z un zéro de v, on dit que v est ***non dégénéré*** en z lorsque $\mathrm{d}v_z$ est inversible.

Remarque — En fait, cette définition marche toujours dans le cas où on considère un champ de vecteurs v sur M une variété lisse. Cela demande un peu de travail que Milnor n'évoque pas vraiment, mais le point à retenir est que comme z est un zéro du champ de vecteurs, on n'aura pas de problème de définitions qu'on travaille avec une certaine carte ou une autre.

Lemme — L'indice de v en un zéro non dégénéré z est soit $+1$, soit -1, selon que le déterminant de $\mathrm{d}v_z$ soit positif ou négatif.

Preuve — On se ramène en fait à ce que l'on a fait dans la preuve de la proposition dans la partie **I.c** : si $\det(\mathrm{d}v_z) > 0$, alors v préserve l'orientation et on peut alors trouver une isotopie lisse entre v et l'identité, et comme le degré est invariant par homotopie, on a donc $\iota(v, z) = \deg(\mathrm{id}) = 1$.

Si inversement $\det(\mathrm{d}v_z) < 0$, alors on peut cette fois relier homotopiquement v à une réflexion et alors on a bien $\iota(v, z) = -1$. ∎

Exemple — Dans $\mathbf{R}^2$, considérons

$$v : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (x, -y) \end{array}$$

au point $(0, 0)$ (point selle). On a alors

$$\det(\mathrm{d}v_0) = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -1$$

ce qui entraîne donc que $\iota(v, (0, 0)) = -1$.