Exercice 1. Quelle est la série de Fourier de la fonction $x \mapsto \cos^4(x)$?
Quelle est la série de Fourier d'un polynôme trigonométrique ?

Les intégrales pour calculer les coeffs b_n sont penibles
mais on peut trouver les facilement

méthode 1

On va commencer par $e^{ix} = \cos x + i \sin x$

$$\Rightarrow \cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$$

$$\cos^4 x = \left(\frac{1}{2}\right)^4 (e^{ix} + e^{-ix})^4$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^4 (a+b)^4$$

= developer avec binôme de Newton

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

méthode 2

$$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 \Rightarrow \cos^2\theta = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)$$

$$\Rightarrow \cos^4\theta = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)^2$$

developer $\Rightarrow$??
et utiliser

$$\cos 4\theta = 2\cos^2 2\theta - 1$$

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-périodique, égale à $|x|$ sur $[-\pi, \pi[$. Tracer le graphe de f, donner sa série de Fourier et étudier la convergence de celle-ci. En déduire la valeur des sommes des séries

$$\left(\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{(2k+1)^2}\right), \left(\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}\right), \left(\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{(2k+1)^4}\right), \left(\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^4}\right).$$

f est paire $\Rightarrow$ $\forall n \quad b_n = 0$

$$a_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos(nt)\,dt$$

si f cont en t

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1} a_n \cos(nt)$$

on doit trouver pour nôtre f

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k\geq 0} \frac{1}{(2k+1)^2}\cos(kt)$$

pour $f(x) = |x|$ sur $]-\pi, \pi[$

$= x$ sur $]0, \pi[$

Calculer $a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t\cos(nt)\,dt$ utiliser IPP

Mq $\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum \frac{1}{(2k+1)^2} = 0$ et en dēduire la valeur de $\sum \frac{1}{(2k+1)^2}$

Mq $\sum \frac{1}{k^2} = \sum \frac{1}{(2k+1)^2} + \frac{1}{4}\sum \frac{1}{k^2}$

Pour $\sum \frac{1}{(2k+1)^4}$ utiliser PARSEVAL

Exercice 3. Développer la fonction $f : x \mapsto |\sin x|$ en série de Fourier et en déduire la valeur des sommes $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2-1}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(4n^2-1)^2}$.

Vous devez expliciter $f(0) = \frac{a_0}{2} + \sum a_n$ pour trouver la valeur de 1ère série

$x \mapsto |\sin(x)|$ est paire $\Rightarrow b_n = 0 \ \forall n$

et $a_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt)\, dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \cos(nt)\, dt$

$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(t) \cos(nt)\, dt$

Rappel $\sin(n+1)t = \sin t \cos nt + \cos t \sin nt$

$\sin(n-1)t = \sin -t \cos nt + \cos -t \sin nt$

$\Rightarrow 2 \sin t \cos nt = \sin(n+1)t - \sin(n-1)t$

on peut déterminer a_n facilement avec cette formule

attention à la parité de l'entier n

Pour l'autre série appliquer PARSEVAL

$$\|f\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)^2\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 t\, dt$$

Rappel $\cos 2t = \cos^2 t - \sin^2 t$

$= 1 - 2\sin^2 t \Rightarrow \sin^2 t = \frac{1}{2}(1 - \cos 2t)$