(b) Montrer que si $|a_n| \sim |b_n|$, alors $R = R'$.

Exercice 4. Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière. Montrer que les deux séries $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ et $\sum_{n\geqslant 0} |a_n| z^n$ ont même rayon de convergence. Les domaines de convergence sont-ils nécessairement égaux ?

Et si on appliqué 3b) ci-dessus avec $b_n = |a_n|$?

Pour les domaines de CVS on doit chercher un exemple "simple"

genre $a_n = (-1)^n$ facile à voir que $R = 1$

$\Rightarrow$ $]-1,1[\subset$ le domaine de CVS

etudier CVS en $x = \pm 1$

Exercice 5. Soit $\sum a_n x^n_{n\in\mathbb{N}}$ une série entière de rayon $R > 0$ et de somme f sur $]-R, R[$.

1. Montrer que f est paire si et seulement si pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_{2k+1} = 0$.
2. Montrer que f est impaire si et seulement si pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_{2k} = 0$.
3. Montrer que $f^{(n)}$ est la fonction nulle si et seulement si pour tout $k \geqslant n$, $a_k = 0$.

Lire la section II 3 du poly sur la regularité
Corollary 3 35

si $\sum a_k x^k$, $\sum b_k x^k$ ont rayon de CV >0

et $\sum a_k x^k = \sum b_k x^k$ alors $a_k = b_k$ $\forall k$

l'exo est facile après

Exercice 6. [CC du 05/05/2010]

1) Développer en série entière de la variable x la fonction $x \mapsto \frac{1}{1-x^3}$.

2) En déduire le développement en série entière de $\frac{1}{1+x+x^2}$.

On a que $\sum_{n\geqslant 0} y^n = \frac{1}{1-y}$ et $R = 1 > 0$

il s'ensuit que $\frac{1}{1-x^3} = \sum_{n\geqslant 0} (x^3)^n$ par substitution $y = x^3$

$$= \sum_{n\geqslant 0} x^{3n}$$

2) on commence par l'identité $1-x^3 = (1-x)(x^2+x+1)$

$$\Rightarrow \quad \frac{(1-x)}{1-x^3} = \frac{1}{(x^2+x+1)}$$

maintenant il vous reste un petit calcul

Exercice 7. Trouver le rayon de convergence des séries entières dont les termes généraux sont :

(a) $2^n z^{2n}$, c'est-à-dire la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ avec $a_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est impair,} \\ 2^{n/2} & \text{si } n \text{ est pair.} \end{cases}$

(b) $a_n z^n$ avec $a_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est impair,} \\ 2^n & \text{si } n \text{ est pair.} \end{cases}$

vous devez utiliser l'autre façon à déterminer R à savoir

$$\boxed{\text{Thm} \quad 1/R = \limsup |a_n|^{1/n}}$$

a) $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{0}{2^{n/2}} = 0$ si n pair

pas défini si n impair

il est clair que l'on ne pourra pas déterminer r comme ça

Exercice 8. [CC du 05/05/2010] Déterminer le rayon de convergence R puis la somme pour $x \in]-R, R[$ de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{2n+1} x^{2n+1}$.

le rayon de cv est facile à trouver $R = 1$

faites le calcul vous m̂ pour vérifier !

Pour la somme $\int_0^x t^{2n}\, dt = \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ non?

et $\sum t^{2n} = \frac{1}{1-t^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t}\right)$

puis il faut justifier qu'on a le droit d'échanger l'ordre le $\sum \int_0^x = \int_0^x \sum$

Exercice 9. Déterminer le rayon de convergence et la somme des séries entières suivantes :
(a) $\sum_{n\geqslant 2} \frac{x^n}{n(n-1)}$; (b) $\sum_{n\geqslant 0} n(n+1)x^n$; (c) $\sum_{n\geqslant 0} \frac{3n}{n+2} x^n$; (d) $\sum_{n\geqslant 0} \frac{n^2+n-1}{n!} x^n$.

Rappel P un polynôme $\lim_{n\to\infty} \frac{P(n)}{P(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{P(n+1)}{P(n)} = 1$

avec ça vous pouvez trouver R pour a/ b/ c) facilement !

cherchez d/ la réponse $= +\infty$

a/ $\int_0^t t^{n-1}\, dt = \frac{x^{n-1}}{n-1}$ et $\int_0^t \frac{t^{n-1}}{n-1}\, dt = \frac{x^n}{n(n-1)}$

b) $x \frac{d^2}{dx^2} x^{n+1} = (n+1)\, n\, x^{n-1} x$

c/ à faire ce weekend voici un exemple plus "simple"

$\sum \frac{n}{n+1} x^n = f(x) \Rightarrow \frac{d}{dx} x f(x) = \sum n x^n = x \frac{d}{dx} \frac{1}{1-x}$

$= \frac{x}{(1-x)^2} = \frac{x-1+1}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2} - \frac{1}{(1-x)}$

j'ai fait ce calcul "à la louche" j'ai oublié des const d'intégration

mais le résultat est presque bon ! $f(x) = \frac{1}{x}\left(\frac{1}{1-x} + \ln(1-x)\right)$

On peut verifier

$$f(x) = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{x}\ln(1-x)$$

$$= \sum x^n - \sum \frac{1}{n+1} x^{n+1}$$

$$= \sum \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) x^{n+1}$$