Exercice 1. Trouver les rayons de convergence des séries entières de terme général :
(a) nz^n ; (b) $n!z^n$; (c) $\frac{z^n}{n!}$; (d) $\frac{n^n}{n!}z^n$; (e) $2^{-n}(1+\frac{1}{n})^{n^2}z^n$.

Rappels

Déf $R = \sup\left\{|z| : z \in \mathbb{C}, \sum a_n z^n \text{ converge simplement}\right\} \in [0,+\infty] = \overline{\mathbb{R}^+}$.

$|z| > R$ DV grossièrement

$|z| < R$ CVN

$|z| = R$ tt est possible !

Thm $\frac{1}{R} = \limsup |a_n|^{1/n} \leq \limsup \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$

$a_n = nz^n$ $\quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{n} = \frac{n+1}{n} \to 1, \quad n \to \infty$

donc $R = 1$

en effet

$$\sum a_n z^n = z \sum n z^{n-1} = z \frac{d}{dz} \sum z^n = z \frac{d}{dz} \frac{1}{1-z}$$

$$= z \frac{1}{(1-z)^2}$$

On voit que R doit être ≤ 1 car $\to \infty$ $\quad z \to 1$

d/ $a_n = n^n/n! \Rightarrow a_n/a_{n+1} = \frac{\cancel{n^n}}{(n+1)^{n+1}} \frac{(n+1)!}{n!} = \frac{1}{n+1} \frac{1}{(1+1/n)^n} (n+1) \to 1/e$

Indication $\quad (1+1/n)^n = \exp n \log(1+1/n) \to e \quad n \to \infty$

$a_n = 2^{-n}(1+1/n)^{n^2} \Rightarrow a_n^{1/n} = 2^{-1} \times (1+1/n)^{n^2/n} = \frac{1}{2}(1+1/n)^n$
$\to \frac{1}{2} \times e$

donc d'après le thm $1/R = e/2 \Rightarrow R = 2/e$

Exercice 2. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$

(a) si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée ne tendant pas vers 0.

(b) si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite qui tend vers 0, telle que $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ diverge.

a) On considère qq exemples

$a_n = 1 \qquad \sum a_n z^n = \sum z^n = \frac{1}{1-z} \quad , \quad R = 1 = \frac{a_n}{a_{n+1}}$

Maintenant

$|a_n| \leqslant M, \forall n \quad \Rightarrow \quad |\sum a_n z^n| \leqslant \sum |a_n||z^n|$ à justifier

$\leqslant M \sum |z|^n$

CV si $|z|<1$ à justifier

$\Rightarrow R \geqslant 1$

On suppose $|a_n| \geqslant \varepsilon > 0, \forall n$ mq $R \leqslant 1$

alors $\sum a_n 1^n = \sum a_n$ DV grossièrement

En effet

$S_N = \sum^N a_n$ CV $\Leftrightarrow$ S_N de Cauchy $\Rightarrow |S_N - S_{N+1}| = |a_{N+1}| \to 0$

b/ On pourra considérer $\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{n+1} z^{n+1}$

c'est l'exemple de base vérifiant l'hypothèse

$a_n \to 0 \Rightarrow a_n$ bornée $\Rightarrow R \geqslant 1$

$\sum a_n$ DV $\Rightarrow \sum a_n 1^n$ DV $\Leftrightarrow 1 \notin$ domaine CVS $\Rightarrow R \leqslant 1$

Exercice 3. Soient $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n z^n$ deux séries entières de rayons de conv
respectivement.

(a) Montrer que si on a $|a_n| \leqslant |b_n|$ à partir d'un certain rang, alors $R \geqslant R'$.

(b) Montrer que si $|a_n| \sim |b_n|$, alors $R = R'$.

a/ on suppose que $|a_n| \leq |b_n| \quad \forall\, n \geq N$

on n'a que $\sum b_n z^n$ CVN $|z| < R'$

il suffit de mq $\sum a_n z^n$ CVN $|z| < R'$

considère $\sup\limits_{|z| \leq R'} |a_n z^n| \underset{?}{\leq}$

b/ Rappel

$|a_n| \sim |b_n| \iff \lim \left|\frac{b_n}{a_n}\right| \to 1$

$\iff \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N$ tq

$1 - \varepsilon \leq \left|\frac{b_n}{a_n}\right| \leq 1 + \varepsilon$

Maintenant il y a 2 étapes

Mq $\exists\, N$ tq $\frac{1}{2}|b_n| \leq |a_n| \leq 2|b_n|$

Mq si $|a_n| \leq 2|b_n|$ alors $R \geq R'$