Correction de la feuille d'exercices 5 : séries de Fourier

Exercice 1. Par linéarisation, on calcule

$$\cos^n(x) = \Big(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\Big)^n = \frac{1}{2^n}\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}\, e^{i(2p-n)x}$$

ce qui correspond à une série de Fourier (certes simple). Par unicité de la décomposition en série de Fourier, et comme les entiers $2p-n$ pour $p \in [\![0,n]\!]$ sont tous différents, on en déduit que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $c_k(f)$ vaut $\binom{n}{p}$ si k est de la forme $2p-n$ avec $p \in [\![0,n]\!]$, et $c_k(f)$ vaut 0 sinon.

Exercice 2. La fonction f est C^1_{pm} et continue sur $\mathbb{R}$ grâce au fait que

$$\lim_{x\to\pi^+} f(x) = \lim_{x\to-\pi^+} f(x) = |-\pi| = |\pi| = \lim_{x\to\pi^-} f(x)$$

Donc sa série de Fourier converge normalement vers f.
On calcule

$$c_0(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x|\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$$

tandis que pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$

$$\begin{aligned}
c_n(f) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x|e^{-inx}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0}(-x)e^{-inx}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} xe^{-inx}\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{2\pi}\Big[x\frac{e^{-inx}}{-in}\Big]_{-\pi}^{0} - \frac{1}{2\pi in}\int_{-\pi}^{0} e^{-inx}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2\pi}\Big[x\frac{e^{-inx}}{-in}\Big]_0^{\pi} + \frac{1}{2\pi in}\int_0^{\pi} e^{-inx}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi in}\Big[xe^{-inx}\Big]_{-\pi}^{0} - \frac{1}{2\pi n^2}\Big[e^{-inx}\Big]_{-\pi}^{0} - \frac{1}{2\pi in}\Big[xe^{-inx}\Big]_0^{\pi} + \frac{1}{2\pi n^2}\Big[e^{-inx}\Big]_0^{\pi} \\
&= \frac{1}{2in}(-1)^n - \frac{1}{2\pi n^2} + \frac{1}{2\pi n^2}(-1)^n - \frac{1}{2in}(-1)^n + \frac{1}{2\pi n^2}(-1)^n - \frac{1}{2\pi n^2} \\
&= \frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2}.
\end{aligned}$$

Donc $c_n(f)$ est nul si n est pair et égal à $\dfrac{-2}{\pi n^2}$ si n est impair.
En écrivant que la fonction f est égale à la somme de sa série de Fourier au point 0, on obtient (car on ne tient en compte que les impairs)

$$0 = \frac{\pi}{2} + 2\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{-2}{\pi(2k+1)^2}$$

et donc

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Or en séparant les entiers en pairs et impairs, on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(2k)^2} + \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} + \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}$$

d'où

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{4}{3}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

D'après le théorème de Parseval, on obtient

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\,\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{4} + 2\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{4}{\pi^2(2k+1)^4}$$

ce qui donne

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^4} = \frac{\pi^2}{8}\Big(\frac{\pi^2}{3}-\frac{\pi^2}{4}\Big) = \frac{\pi^4}{96}.$$

La séparation des entiers en pairs et impairs donne ici

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4} = \sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{(2p)^4} + \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^4} = \frac{1}{16}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4} + \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^4}$$

et on conclut

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{16}{15}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

Exercice 3. Pour tout $x \in [-\pi,\pi[$, $f(x) = \cos(ax)$. Par 2π-périodicité, $f(\pi) = f(-\pi) = \cos(-a\pi) = \cos(a\pi)$ et $f(\pi+) = f(-\pi+) = \cos(-a\pi) = \cos(a\pi) = f(\pi-)$. Ainsi, f est continue sur $\mathbb{R}$ et C^1 par morceaux. Sa série de Fourier converge normalement.
Calculons les coefficients $(c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$.

$$\begin{aligned} 2\pi c_n(f) = \int_{-\pi}^{\pi}\cos(ax)e^{-inx}\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(e^{iax}e^{-inx}+e^{-iax}e^{-inx})\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\Big[\frac{e^{i(a-n)x}}{i(a-n)}+\frac{e^{i(-a-n)x}}{i(-a-n)}\Big]_{-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{1}{2i}\Big[\frac{e^{i(a-n)x}}{a-n}-\frac{e^{i(-a-n)x}}{a+n}\Big]_{-\pi}^{\pi}. \end{aligned}$$

On a pu diviser par les réels non nuls $a-n$ et $a+n$ grâce au fait que $a \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$. En utilisant le fait que $e^{-in\pi} = e^{-in\pi} = (-1)^n$, on obtient

$$2\pi c_n(f) = \frac{(-1)^n}{2i}\Big[\frac{e^{ia\pi}-e^{-ia\pi}}{a-n}+\frac{e^{ia\pi}-e^{-ia\pi}}{a+n}\Big] = (-1)^n\sin(a\pi)\frac{2a}{a^2-n^2}.$$

Donc

$$c_n(f) = \frac{(-1)^n\sin(a\pi)}{\pi}\frac{a}{a^2-n^2}.$$

Autre méthode : Par parité de f, les coefficients $b_n(f)$ pour $n \geq 1$ sont nuls. Il suffit de calculer $c_0(f) = a_0(f)/2$ et $a_n(f)$ pour $n \geq 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \pi a_n(f) = \int_{0}^{\pi}\cos(ax)\cos(nx)\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi}\cos((a-n)x)+\cos((a+n)x)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\Big[\frac{\sin((a-n)\pi)}{a-n}+\frac{\sin((a-n)\pi)}{a+n}\Big] \\ &= \frac{(-1)^n}{2}\sin(a\pi)\Big[\frac{1}{a-n}+\frac{1}{a+n}\Big] \\ &= \frac{(-1)^n}{2}\sin(a\pi)\frac{2a}{a^2-n^2}. \end{aligned}$$

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{\sin(a\pi)}{\pi} \sum_{n\in\mathbb{Z}} (-1)^n \frac{a}{a^2-n^2} e^{inx} = \frac{\sin(a\pi)}{\pi} \Big(\frac{1}{a} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2a}{a^2-n^2} \cos(nx) \Big).$$

Attention : le terme constant est $c_0(f) = a_0(f)/2$ et non $a_0(f)$. Par ailleurs, l'égalité $f(x) = \cos(ax)$ n'est valable que pour $x \in [-\pi, \pi]$.
En divisant $\sin(\pi)/\pi$ et en évaluant l'égalité en 0 et en π, on obtient

$$\frac{\pi}{\sin(a\pi)} = \frac{1}{a} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2a}{a^2-n^2} \quad \text{et} \quad \frac{\pi}{\tan(a\pi)} = \frac{1}{a} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2a}{a^2-n^2}.$$

Exercice 4. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on écrit

$$\begin{aligned} c_n(f) &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{0} \sin x e^{-inx} \, \mathrm{d}x + \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{\pi} \sin x e^{-inx} \, \mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{4\pi i} \int_{-\pi}^{0} (e^{ix} - e^{-ix}) e^{-inx} \, \mathrm{d}x + \frac{1}{4\pi i} \int_{0}^{\pi} (e^{ix} - e^{-ix}) e^{-inx} \, \mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{4\pi i} \int_{-\pi}^{0} (e^{-(n-1)ix} - e^{-(n+1)ix}) \, \mathrm{d}x + \frac{1}{4\pi i} \int_{0}^{\pi} (e^{-(n-1)ix} - e^{-(n+1)ix}) \, \mathrm{d}x \end{aligned}$$

ce qui donne pour $n \neq \pm 1$

$$\begin{aligned} c_n(f) &= -\frac{1}{4\pi i} \Big[\frac{e^{-(n-1)ix}}{-(n-1)i} - \frac{e^{-(n+1)ix}}{-(n+1)i} \Big]_{-\pi}^{0} + \frac{1}{4\pi i} \Big[\frac{e^{-(n-1)ix}}{-(n-1)i} - \frac{e^{-(n+1)ix}}{-(n+1)i} \Big]_{0}^{\pi} \\ &= \frac{1}{4\pi(n-1)} \Big(-1 + (-1)^{n-1} + (-1)^{n-1} - 1 \Big) + \frac{1}{4\pi(n+1)} \Big(1 - (-1)^{n+1} - (-1)^{n+1} + 1 \Big) \\ &= \Big(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n-1} \Big) \frac{1 - (-1)^{n+1}}{2\pi} = -\frac{1 + (-1)^n}{\pi(n^2-1)} \end{aligned}$$

ce qui est égal 0 si n est impair et $-\dfrac{2}{\pi(n^2-1)}$ si n est pair.
Pour les deux derniers coefficients, on calcule

$$\begin{aligned} c_1(f) &= -\frac{1}{4\pi i} \Big[x - \frac{e^{-2ix}}{-2i} \Big]_{-\pi}^{0} + \frac{1}{4\pi i} \Big[x - \frac{e^{-2ix}}{-2i} \Big]_{0}^{\pi} \\ &= -\frac{1}{4\pi i} \Big(\pi - \frac{1-1}{-2i} \Big) + \frac{1}{4\pi i} \Big(\pi - \frac{1-1}{-2i} \Big) = 0 \end{aligned}$$

et on trouve de même $c_{-1}(f) = 0$.
Comme la fonction est continue et C^1_{pm}, on sait que la série de Fourier converge normalement vers f. En particulier en $x = 0$, ceci s'écrit

$$0 = f(0) = c_0(f) + 2 \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{-2}{\pi((2p)^2 - 1)}$$

ce qui implique que

$$\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{4p^2 - 1} = \frac{\pi}{4} \frac{-2}{\pi(0-1)} = \frac{1}{2}.$$

En écrivant la formule de Parseval, on obtient

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{4}{\pi^2}+2\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{4}{\pi^2((2p)^2-1)^2}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-\cos(2x)}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{4}{\pi^2}+\frac{8}{\pi^2}\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{(4p^2-1)^2}$$

ce qui donne

$$\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{(4p^2-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}\Big(\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}\Big)=\frac{\pi^2-8}{16}.$$

Exercice 5. On pose $f(t)=-t+2\pi$ sur $]0,\pi[$. Le seul moyen pour que f soit égal à une somme de sinus est que f soit impair, on pose donc f 2π-périodique telle que $f(t)=-t+2\pi$ sur $]0,\pi[$ et $f(t)=-t-2\pi$ sur $]-\pi,0[$ (avec par exemple $f(0)=f(\pi)=0$).
Par imparité, $a_n=0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, alors que l'on a

$$\begin{aligned}
b_n(f) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(-x+2\pi)\sin(nx)\,\mathrm{d}x\\
&= -\frac{2}{\pi}\Big[(-x+2\pi)\frac{\cos(nx)}{n}\Big]_0^{\pi}-\frac{2}{\pi n}\int_0^{\pi}\cos(nx)\,\mathrm{d}x\\
&= -\frac{2}{\pi}\frac{\pi(-1)^n-2\pi}{n}=\frac{2((-1)^{n+1}+2)}{n}
\end{aligned}$$

pour $n\in\mathbb{N}^*$. La fonction étant C^1_{pm}, le théorème de Dirichlet pour tout $x\in]0,\pi[$ donne le bon résultat.

Exercice 6. L'idée est de considérer deux applications f et g continues par morceaux, 2π-périodiques, l'une paire et l'autre impaire telles que $f(x)=g(x)=x(\pi-x)$ sur $]0,\pi[$, pour pouvoir décomposer la première en somme de cosinus et la deuxième en somme de sinus. Comme $x(\pi-x)$ s'annule en 0 et en π, on peut même prendre $f(x)=g(x)=x(\pi-x)$ sur $[0,\pi]$, et alors f et g sont continues et C^1 par morceaux. La série de Fourier converge donc normalement sur $\mathbb{R}$.
Par parité de f et imparité de g, on a

$$a_n(f)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x(\pi-x)\cos(nx)\mathrm{d}x,\quad b_n(g)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x(\pi-x)\sin(nx)\mathrm{d}x.$$

et les autres coefficients sont nuls. Comme $a_n(f)$ et $b_n(g)$ sont réels, ils se déduisent du calcul de

$$a_n(f)+ib_n(g)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x(\pi-x)e^{inx}\mathrm{d}x.$$

Si $n\neq 0$, alors deux intégrations par parties fournissent

$$\begin{aligned}
\frac{\pi}{2}(a_n(f)+ib_n(g)) &= \Big[(\pi x-x^2)\frac{e^{inx}}{in}\Big]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}(\pi-2x)\frac{e^{inx}}{in}\mathrm{d}x\\
&= 0-\Big[(\pi-2x)\frac{e^{inx}}{-n^2}\Big]_0^{\pi}+\int_0^{\pi}(-2)\frac{e^{inx}}{-n^2}\mathrm{d}x\\
&= -\Big[\frac{-\pi(-1)^n-\pi}{-n^2}\Big]+\Big[(-2)\frac{e^{inx}}{-in^3}\Big]_0^{\pi}\\
&= -\frac{\pi((-1)^n+1)}{n^2}+(-2i)\frac{(-1)^n-1}{n^3}
\end{aligned}$$

Comme $a_n(f)$ et $b_n(g)$ sont réels, on a donc

$$a_n(f) = -\frac{2((-1)^n+1)}{n^2} = \begin{cases} -4/n^2 \text{ si } n \text{ est pair,} \\ 0 \text{ si } n \text{ est impair,} \end{cases}$$

$$b_n(f) = -\frac{4(1-(-1)^n)}{\pi n^3} = \begin{cases} 0 \text{ si } n \text{ est pair,} \\ 8/(\pi n^3) \text{ si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

De même, $a_0(f) = \pi^2/3$ et $b_0(f) = 0$ car $a_0(f)$ et $b_0(g)$ sont réels et

$$a_0(f) + ib_0(g) = \frac{2}{\pi}\left[\frac{\pi x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^\pi = \frac{\pi^2}{3}$$

On en déduit les formules de l'énoncé.

Exercice 7. En posant $x = \pi t$, montrer l'égalité demandée revient à montrer que ,

$$\forall x \in]0, 2\pi[, \quad \frac{x^2}{\pi^2} = \frac{4}{3} + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{+\infty} \frac{2+2i\pi n}{\pi^2 n^2} e^{inx}.$$

Il suffit donc de considérer la fonction 2π-périodique f telle que $f(x) = x^2$ sur $[0, 2\pi[$, de calculer $c_n(f)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, et d'appliquer le théorème de Dirichlet appliqué à tout $x \in]0, 2\pi[$.

Exercice 8. a) Si $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x+\pi) = f(x)$, alors en changeant de variable $y = x - \pi$ dans la seconde intégrale, on a

$$\begin{aligned} c_n(f) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi f(x)e^{-inx}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2\pi}\int_\pi^{2\pi} f(x)e^{-inx}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi f(x)e^{-inx}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi f(y+\pi)e^{-in(y+\pi)}\,dy \\ &= (1+(-1)^n)\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi f(x)e^{-inx}\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

ce qui est nul pour tout n impair.
b) Si $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x+\pi) = -f(x)$, alors le même calcul qu'au a) donne

$$c_n(f) = (1-(-1)^n)\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi f(x)e^{-inx}\,\mathrm{d}x$$

ce qui est nul pour tout n pair.
c) Si $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(\pi - x) = f(x)$, on change de variable $\pi - y = x$, ce qui donne

$$\begin{aligned} c_n(f) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2\pi}\int_\pi^{-\pi} f(\pi-y)e^{-in(\pi-y)}\,dy \\ &= \frac{(-1)^n}{2\pi}\int_{-\pi}^\pi f(y)e^{iny}\,dy = (-1)^n c_{-n}(f) \end{aligned}$$

ce qui implique que $a_n(f) = 0$ si n est impair et que $b_n(f) = 0$ si n est pair.
d) Si $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(\pi - x) = -f(x)$ alors le même calcul qu'au c) donne

$$c_n(f) = -(-1)^n c_{-n}(f)$$

ce qui implique que $a_n(f) = 0$ si n est pair et que $b_n(f) = 0$ si n est impair.

Exercice 9. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $\alpha \in [0, 1[$, on a $|\alpha e^{ix}| < 1$ et donc la série géométrique donne

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\alpha e^{ix}\right)^n = \frac{1}{1 - \alpha e^{ix}}.$$

En prenant la partie réelle, on a donc bien

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^n \cos(nx) = \mathrm{Re}\Big(\frac{1}{1 - \alpha e^{ix}}\Big) = \mathrm{Re}\Big(\frac{1 - \alpha e^{-ix}}{|1 - \alpha e^{ix}|^2}\Big) = \frac{1 - \alpha\cos(x)}{1 + \alpha^2 - 2\alpha\cos(x)}.$$

Si on pose $f(x) = \frac{1-\alpha\cos(x)}{1+\alpha^2-2\alpha\cos(x)}$, nous avons donc écrit la décomposition en série de Fourier, et

$$a_0(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \alpha^0 = 1$$

et pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x = \alpha^n$$

ce qui donne les quantités demandés.

Exercice 10.
Si f est de classe C^1, une intégration par parties donne pour tout $n \in \mathbb{Z}_*$

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\Big[f(x)\frac{e^{-inx}}{-in}\Big]_0^{2\pi} + \frac{1}{2\pi in}\int_0^{2\pi} f'(x)e^{-inx}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{in}c_n(f')$$

car $f(0) = f(2\pi)$. En effectuant p intégrations par parties, on obtient la relation $c_n(f) = \dfrac{c_n(f^{(p)})}{(in)^p}$.
Or pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$|c_n(f)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|\,\mathrm{d}x \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} ||f^{(p)}||_\infty\,\mathrm{d}x = ||f^{(p)}||_\infty.$$

Donc $c_n(f) = O(|n|^{-p})$ quand $|n| \to +\infty$.
Remarque : le théorème de Riemann - Lebesgue assure que $c_n(f^{(p)}) \to 0$ quand $|n| \to +\infty$, ce qui permet d'améliorer ce résultat en $c_n(f) = o(|n|^{-p})$ quand $|n| \to +\infty$.

Exercice 11.
1) La fonction f :
a) est continue sur $\mathbb{R}$, car f est 2π-périodique, continue en tout point de $\mathbb{R}\setminus 2\pi\mathbb{Z}$ et

$$\lim_{x\to 2\pi^-} f(x) = \sin\pi = 0 = \sin 0 = \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 2\pi^+} f(x).$$

b) n'est pas dérivable sur $\mathbb{R}$, à cause des points $2\pi\mathbb{Z}$, car

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(2\pi+h) - f(2\pi)}{h} = \lim_{h\to 0^-}\frac{\sin(\frac{2\pi+h}{2}) - \sin(\frac{2\pi}{2})}{h} = \frac{1}{2}\cos\frac{2\pi}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(2\pi+h) - f(2\pi)}{h} = \lim_{h\to 0^+}\frac{\sin(\frac{h}{2}) - \sin(\frac{0}{2})}{h} = \frac{1}{2}\cos\frac{0}{2} = \frac{1}{2}.$$

c) est de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$, car f est dérivable et de dérivée continue sur $]0, 2\pi[$, et la dérivée admet une limite quand $x \to 0^+$ $(= 1/2)$ et quand $x \to 2\pi^-$ $(= -1/2)$.

2) Contrairement aux apparences, la fonction 2π-périodique f est paire. En effet, l'égalité $f(x) = \sin(x/2)$ est vraie sur $[0, 2\pi]$, même pour $x = 2\pi$ puisque $f(2\pi) = f(0) = \sin(0) = 0 = \sin(\pi)$. Et pour tout $x \in [0, 2\pi]$, on a $2\pi - x \in [0, 2\pi]$, donc

$$f(-x) = f(2\pi - x) = \sin\left(\frac{x}{2}\right) = \sin\left(\frac{x}{2}\right) = f(x).$$

Par conséquent, $b_n(f) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On calcule

$$a_0(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin\left(\frac{x}{2}\right) \mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\Big[-\cos\left(\frac{x}{2}\right)\Big]_0^{2\pi} = \frac{2}{\pi}$$

et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on fait deux intégrations par parties

$$\begin{aligned}\pi a_n(f) &= \int_0^{2\pi} \sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos(nx)\,\mathrm{d}x = -\Big[2\cos\left(\frac{x}{2}\right)\cos(nx)\Big]_0^{2\pi} - 2n\int_0^{2\pi}\cos\left(\frac{x}{2}\right)\sin(nx)\,\mathrm{d}x \\ &= 4 + 4n^2\int_0^{2\pi}\left(\frac{x}{2}\right)\cos(nx)\,\mathrm{d}x = 4 + 4n^2\pi a_n(f)\end{aligned}$$

ce qui implique que $a_n(f) = -\dfrac{4}{\pi(4n^2-1)} = -\dfrac{4}{\pi(2n-1)(2n+1)}$. (Une autre façon de calculer consiste à remplacer le sinus et cosinus par les exponentielles complexes, puis on développe le produit et on intègre alors des exponentielles). La série de Fourier est donc bien celle demandée.

3) a) f étant C^1_{pm}, la série de Fourier converge simplement pour tout $x \in \mathbb{R}$.

b) f étant de plus continue, la convergence est normale sur $\mathbb{R}$.

c) La série de Fourier converge vers f.

4) En écrivant que la série de Fourier pour $x = 0$ converge vers $f(0) = 0$ on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{\pi}{4} \times \frac{2}{\pi} = \frac{1}{2}.$$

Une méthode plus simple est de passer à la limite quand $N \to +\infty$ dans les sommes téléscopiques

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\Big(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\Big) = \frac{1}{2}\Big(1 - \frac{1}{2N+1}\Big).$$

Exercice 12. On pose $I = \int_a^b u(t)v(t)\,\mathrm{d}t$.

1) On écrit

$$\begin{aligned}|I_n - I| &= \left|\sum_{k=0}^{n-1}\int_{t_k}^{t_{k+1}}(u(t_{k+1}) - u(t))v(t)\,\mathrm{d}t\right| \le \sum_{k=0}^{n-1}(u(t_k) - u(t_{k+1}))\int_{t_k}^{t_{k+1}}|v(t)|\,\mathrm{d}t \\ &\le \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(u(t_k) - u(t_{k+1})) = \frac{b-a}{n}\end{aligned}$$

car on a reconnu une série télescopique.

2) En posant $b_k = \int_a^{t_k} v(t)\,\mathrm{d}t$, on écrit une transformation d'Abel

$$I_n = \sum_{k=0}^{n-1} u(t_{k+1})(b_{k+1} - b_k) = \sum_{k=1}^{n} u(t_k)b_k - \sum_{k=0}^{n-1} u(t_{k+1})b_k = \sum_{k=0}^{n-1}(u(t_k) - u(t_{k+1}))b_k$$

car $u(t_n) = u(b) = 0$ et $b_0 = 0$.

3) Quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a grâce à 2) :

$$|I_n| \leq \sum_{k=0}^{n-1}(u(t_k) - u(t_{k+1}))|b_k| \leq \max_{x\in[a,b]}\Big|\int_a^x v(t)\,\mathrm{d}t\Big|\sum_{k=0}^{n-1}(u(t_k) - u(t_{k+1})) = \max_{x\in[a,b]}\Big|\int_a^x v(t)\,\mathrm{d}t\Big|$$

ce qui donne par inégalité triangulaire et grâce à 1) :

$$|I| = |I - I_n + I_n| \leq |I - I_n| + |I_n| \leq \frac{b-a}{n} + \max_{x\in[a,b]}\Big|\int_a^x v(t)\,\mathrm{d}t\Big|.$$

Comme cette inégalité est vraie pour tout $n \geq 1$, la limite n tends vers l'infini nous donne le résultat.

4) Il existe une subdivision de $[0, 2\pi]$ $0 = a_0 < a_1 < .... < a_N = 2\pi$ telle que $f\big|_{]a_i,a_{i+1}[}$ est monotone.

Fixons $i \in \{0, ..., N-1\}$, et on pose $u(t) = (f(t) - f(a_{i+1}))/(f(a_i) - f(a_{i+1}))$ si $f\big|_{]a_i,a_{i+1}[}$ est décroissante et $u(t) = (f(a_{i+1}) - f(t))/(f(a_{i+1}) - f(a_i))$ si $f\big|_{]a_i,a_{i+1}[}$ est croissante. Dans les deux cas, et en posant $a = a_i$, $b = a_{i+1}$ et $v(t) = e^{-int}$, nous observons que toutes les hypothèses sur u et v sont vérifiées.

Ainsi, le résultat du 3) nous assure que

$$\Big|\int_{a_i}^{a_{i+1}} \frac{f(t) - f(a_{i+1})}{f(a_i) - f(a_{i+1})}e^{-int}\mathrm{d}t\Big| \leq \max_{x\in[a_i,a_{i+1}]}\Big|\int_{a_i}^x e^{-int}\,\mathrm{d}t\Big|$$

ce qui implique

$$\frac{1}{|f(a_i) - f(a_{i+1})|}\Big|\int_{a_i}^{a_{i+1}} f(t)e^{-int}\mathrm{d}t\Big| \leq \frac{|f(a_{i+1})|}{|f(a_i) - f(a_{i+1})|}\Big|\int_{a_i}^{a_{i+1}} e^{-int}\mathrm{d}t\Big| + \max_{x\in[a_i,a_{i+1}]}\Big|\int_{a_i}^x e^{-int}\,\mathrm{d}t\Big|$$

Or si $n \neq 0$, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\Big|\int_{a_i}^x e^{-int}\,\mathrm{d}t\Big| = \frac{1}{|n|}|e^{-inx} - e^{-ina_i}| \leq \frac{2}{|n|}$$

On a donc démontré que

$$\Big|\int_{a_i}^{a_{i+1}} f(t)e^{-int}\mathrm{d}t\Big| \leq |f(a_{i+1})|\frac{2}{|n|} + |f(a_i) - f(a_{i+1})|\frac{2}{|n|} \leq \frac{6}{|n|}\sup|f|.$$

C'est inégalité étant vraie quel que soit $i \in \{0, ..., N-1\}$ on conclut que pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$ on a

$$|c_n(f)| \leq \frac{1}{2\pi}\sum_{i=0}^{N-1}\Big|\int_{a_i}^{a_{i+1}} f(t)e^{-int}\mathrm{d}t\Big| \leq \frac{6N}{2\pi|n|}\sup|f|$$

ce qui montre que les coefficients de Fourier sont en $O(1/n)$.

5) Cette question ressemble à l'exercice 10, à un détail près : f est seulement supposée C^1_{pm} et C^0, et non C^1. Il existe une subdivision de $[0, 2\pi]$ $0 = a_0 < a_1 < .... < a_N = 2\pi$ telle que $f\big|_{]a_i,a_{i+1}[}$ est prolongeable en une fonction $C^1([a_i, a_{i+1}])$, on obtient alors par intégration par parties pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$

$$\begin{aligned} c_n(f) &= \frac{1}{2\pi}\sum_{i=0}^{N-1}\int_{a_i}^{a_{i+1}} f(t)e^{-int}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\sum_{i=0}^{N-1}\left(\Big[f(t)\frac{e^{-int}}{-in}\Big]_{a_i}^{a_{i+1}} + \frac{1}{in}\int_{a_i}^{a_{i+1}} f'(t)e^{-int}\,\mathrm{d}t\right) \\ &= \frac{1}{2\pi in}\sum_{i=0}^{N-1}\Big(-f(a_{i+1})e^{-ina_{i+1}} + f(a_i)e^{-ina_i}\Big) + \frac{c_n(f')}{in} = \frac{c_n(f')}{in} \end{aligned}$$

car nous reconnaissons une somme téléscopique et $f(0) = f(2\pi)$. Ainsi, $|c_n(f) \leq ||f'||_\infty/n$.